Theoretische Mechanik

Markus Zetto

Orpheus-Seminar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme und Zustände

- **Systeme:** Eine exakte Definition des Begriffs eines physikalischen Systems ist ohne viel Mathematik (symplektische Geometrie) schwer zu geben, daher beschreiben wir nur die in diesem Begriff oft enthaltenen Daten. Um ein physikalisches System eindeutig zu bestimmen, benötigen wir:
  - Die enthaltenen Punktteilchen/ Massepunkte, zusammen mit ihren Massen
  - Die enthaltenen starren Körper, zusammen mit ihren Massen und Trägheitsmomenten/ -tensoren
  - Elastische/Plastische Körper, etc.
  - Die wirkenden externen (z.B. Gravitationskraft nach unten die auf alle Objekte wirkt) und internen (z.B. gravitative Anziehung zweier Planeten zueinander) Kräfte

- **Zustände:** Jedem System kann eine Menge an möglichen Zuständen zugeordnet werden, in denen es sich zu einem festen Zeitpunkt befinden kann. Beispielsweise wird der Zustand eines Punktteilchens in 3D durch dessen Ort und Geschwindigkeit bestimmt; oder der eines Starren Körpers durch seine Orientierung und Winkelgeschwindigkeit. Man beachte, dass höhere Ableitung von Ort/ Winkel nicht nötig sind, diese werden bestimmt durch die:
- **Bewegungsgleichung(en):** Ist der Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt bekannt, so ist das Ziel der Mechanik, ihn zu jeder Zeit in der entsprechenden Zukunft oder Vergangenheit zu bestimmen. Dies verläuft meist über eine Differentialgleichung zweiten Grades, wie

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{s}}\,, \qquad M = I \cdot \ddot{\phi}\,. \tag{1}$$

Anmerkung. Eigentlich müsste die Newtonsche Bewegungsgleichung $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ lauten mit $\vec{p} = m\vec{v}$ dem Impuls – wegen der Produktregel kommt man hiermit für zeitlich variable Masse auf verschiedene Ergebnisse.

Beispiel. Für einen Massepunkt der Masse $m > 0$ in 3D ohne wirkende Kräfte (hiermit ist das System angegeben) mit Ort x_0 und Geschwindigkeit v_0 am Zeitpunkt $t = 0$ (hiermit ist der Zustand an $t = 0$ gegeben) lautet die Bewegungsgleichung

$$0 = \vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = v_0 t + x_0,\; v(t) = v_0$$

wie sich durch zweifaches Integrieren nach t ergibt. Damit ist der Zustand für alle Zeiten bestimmt, das mechanische Problem also gelöst.

2 Freiheitsgrade, verallgemeinerte Koordinaten und Zwangsbedingungen

Wir können die Bewegung eines Massepunktes in 2D auch in Polarkoordinaten (Winkel ϕ und Radius r) beschreiben. Hier wird er aber i.A. keine geradlinige Bewegung in beiden Komponenten durchführen, sondern erfährt eine radial wirkende Scheinkraft, die Zentrifugalkraft. Ähnlich in 3D mit Zylinder- oder Kugelkoordinaten; in letzteren tritt auch die Corioliskraft auf. Ein weiteres Beispiel wäre ein Teilchen in einem beschleunigten Bezugssystem (z.B. einem fahrenden Bus), welches als Scheinkraft eine Trägheitskraft erfährt (oder die Eulerkraft in einem beschleunigten drehenden Bezugssystem). Die Newtonschen Gleichungen gelten also ohne Weiteres nur in kartesischen Koordinaten, sonst braucht man Extraterme.

Ein Teilchen auf einer Achterbahn, d.h. das sich auf dem Graphen einer Funktion $y(x)$ bewegen muss, hat effektiv nur eine Richtung in die es sich bewegen kann – damit wäre es auch sinnvoll, diese Bewegung nur durch eine Koordinate zu beschreiben, z.B. x oder die Bogenlänge der Bahn [1]. Da dazu aber die y-Koordinate nicht vergessen werden darf, gilt auch hier die Newton-Gleichung $F = ma$ ohne Weiteres nicht mehr. Dies ließe sich z.B. durch Einführen einer Zwangskraft reparieren, die senkrecht zur Bahn wirkt und damit diese Zwangsbedingung erzwingt – in noch allgemeineren Fällen wie bei einem Doppelpendel wird das aber ziemlich kompliziert.

Wir suchen also nach einem Formalismus, der Mechanik in allgemeinen Koordinatensystemen beschreiben kann und damit auch Zwangskräfte/ Zwangsbedingungen mit einbezieht. Wir schreiben diese verallgemeinerten Koordinaten (könnten ja z.B. Winkel oder etwas noch komplizierteres sein) der Unterscheidung halber als q_i, wobei $i = 1, \dots, f$ durchläuft – wir bezeichnen dabei f als Anzahl der *Freiheitsgrade*.

3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Theorem (Noether-Theorem)**.** *Jeder kontinuierlichen Symmetrie eines Systems entspricht eine Erhaltungsgröße (und umgekehrt). Kontinuierlich heißt hierbei praktisch, dass die Symmetrie von einer reellen Zahl parametrisiert werden kann.*

Wir können diese Aussage mit unseren Methoden nicht allgemein beweisen, später werden aber Spezialfälle verdeutlicht. Zur Veranschaulichung ein:

Beispiel. Wir betrachten einen Flummi der Masse m, der über einer Ebene in gewisser Höhe fallen gelassen wird (in 3D), dann reibungsfrei wiederholt vom Boden abprallt und so stets dieselbe Höhe erreicht. Dieses System verfügt über folgende Symmetrien:

- *Translationssymmetrie* in horizontale (d.h. x- und y-) Richtung – wird der Ball einen Meter weiter links fallen gelassen, ist seine Bewegung immer noch dieselbe (nur verschoben). Dem entspricht, wie wir sehen werden, die Erhaltung des Impulses in x- und y-Richtung (z-Impuls wird augenscheinlich nicht erhalten!)
- *Zeittranslationssymmetrie*: Wird der Flummi später fallen gelassen, bewegt er sich danach dennoch auf dieselbe Art. Dem entspricht nach dem Noether-Theorem die Energieerhaltung.
- *Drehsymmetrie* um die z-Achse, da sich hierbei wieder die Höhe des Flummis nicht ändert (anders als bei x- und y-Achse). Dem entspricht die Drehimpulserhaltung in z-Richtung.
- *Symmetrie unter Wechsel des Inertialsystems*, d.h. Addition einer konstanten Geschwindigkeit in x-/y-Richtung (eine ähnliche, aber kompliziertere Symmetrie existiert auch in z-Richtung); dies führt auf die Anfangsposition $x(t = 0), y(t = 0)$ als Erhaltungsgröße.

[1] Letztere ist besser falls es Loopings geben sollte, da x dann die Position nicht eindeutig bestimmt

4 Lagrange-Formalismus

Wir führen einen Formalismus ein, der die Behandlung von Systemen mittels beliebiger verallgemeinerten Koordinaten erlaubt und es einfach macht, den obigen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen zu beschreiben.

Fermat'sches Prinzip aus der Optik: Lichtstrahlen nehmen immer den zeitlich kürzesten Weg von Anfangs- zu Zielort. Damit lässt sich (durch die Verlangsamung von Licht in gewissen Medien) u.a. das Snellius'sche Brechungsgesetz herleiten. Funktioniert etwas Ähnliches auch in der Mechanik?

Hamilton'sches Prinzip der kleinsten Wirkung: Ein physikalisches System nimmt, bei zeitlicher Entwicklung von Zustand A bei $t = t_0$ zu Zustand B bei $t = t_1$, immer den Weg/ die Entwicklung mit der kleinsten (bzw. mit extremaler) Wirkung

$$S := \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt \quad . \tag{2}$$

In der klassischen Mechanik ist hierbei die Lagrangefunktion L definiert als

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - V = (\text{kinetische Energie}) - (\text{potentielle Energie}) \tag{3}$$

Anmerkung. Im Allgemeinen, z.B. bei zeitlich variablen externen Kräften, kann $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ auch von t explizit abhängen.

Theorem (Euler-Lagrange-Gleichung)**.** *Die Zeitentwicklung des Systems (man sagt Trajektorie) mit der geringsten Wirkung lässt sich finden als Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems (wobei $i = 1, \ldots, f$ läuft):*

$$\frac{d}{dt}\left(\left. \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \right|_{q_i = q_i(t),\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t)} \right) = \left. \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_i} \right|_{q_i = q_i(t),\ \dot{q}_i = \dot{q}_i(t)} \tag{4}$$

Bemerke die Einsetzung von $q_i = q_i(t)$ auf beiden Seiten; oft werden diese weggelassen und mit der totalen Zeitableitung impliziert (diese wäre ansonsten ja 0 in unserer Situation, bei der L nicht explizit von t abhängt).

Beispiel. Punktteilchen mit Masse $m(t)$ und unter Einfluss des Potentials $V(\vec{x})$ in 3D. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m(t) \vec{v}^2 - V(\vec{x}) \tag{5}$$

Wir erhalten durch die ELG die Newton'schen Bewegungsgleichungen, in der früher angemerkten "richtigeren" Form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} m(t)\vec{v} = \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \tag{6}$$

Definition. Dadurch motiviert, definieren wir *kanonischen Impuls* und *verallgemeinerte Kraft*

$$\Pi_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ , \quad K_i := \frac{\partial L}{\partial q_i}\ , \tag{7}$$

womit die Euler-Lagrange-Gleichungen die folgende Form erhalten (äußerst ähnlich zu Newtons Bewegungsgleichung):

$$\dot{\Pi}_i = K_i \tag{8}$$

Schließlich definiere die *Hamilton-Funktion* H, welche so etwas wie die Gesamtenergie darstellen soll:

$$H := \sum_{i=1}^{f} \Pi_i \cdot \dot{q}_i - L \tag{9}$$

Theorem. *Hängt* L *nicht von einer bestimmten Koordinate* q_j *ab, so ist* Π_j *eine Erhaltungsgröße.*

Beweis.

$$\frac{d}{dt}\Pi_j = K_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{10}$$

□

Theorem. *Hängt* L *nicht explizit von* t *ab, wie von uns ja immer angenommen wird, so ist die Gesamtenergie/ Hamiltonfunktion* H *eine Erhaltungsgröße.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right) - \frac{d}{dt}L = \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) = \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i = 0 \quad \square \end{aligned} \tag{11}$$

Anmerkung. Dies sind, wie man an den Beweisen sehen kann, jeweils Genau-Dann-Wenn-Aussagen – wir haben also zwei Spezialfälle des Noether-Theorems nachgewiesen.

Beispiel. Für ein Teilchen in 2D-Polarkoordinaten teilt sich die gesamte kinetische Energie auf in Rotationsenergie $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ und Energie für die radiale Bewegung $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Damit lautet ohne weitere Kräfte die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}r^2\omega^2 + \frac{m}{2}\dot{r}^2 \tag{12}$$

Dies ergibt als Euler-Lagrange-Gleichungen, da unabhängig von ϕ, einerseits Drehimpulserhaltung $\dot{L} = M = 0$, wobei L wohlgemerkt der zu ϕ gehörende kanonische Impuls ist (!); sowie für r die Zentrifugalkraft:

$$\frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} = mr\omega^2 \tag{13}$$

5 Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich auf eine äquivalente, aber manchmal einfachere Art formulieren. Hierfür führen wir eine Variablen-Substitution durch; wir ersetzen die Geschwindigkeit $\dot{q}$ durch den kanonischen Impuls p, d.h. wir stellen die Abhängigkeit $p(q, \dot{q})$ um zu $\dot{q}(q, p)$. Dies ist leider nicht immer möglich, aber zumindest in allen für uns interessanten Situationen. Wir berechnen dann (der Einfachkeit halber arbeiten wir mit nur einer verallgmemeinerten Koordinate q):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(q,p)}{\partial p} =& \frac{\partial}{\partial p}\Big(p\dot{q}(q,p) - L\left(q, \dot{q}(p)\right)\Big) = \\
=& \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} \\
\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} =& p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - p\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\dot{p}
\end{aligned} \tag{14}$$

In der ersten Rechnung haben wir die Definition von p verwendet, in der zweiten die Euler-Lagrange-Gleichung – umgekehrt könnten wir diese jeweils durch Rückwärts-Rechnen aus den beiden Identitäten zurückgewinnen. Damit sind die Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent zu den so genannten **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen** (hier in beliebig vielen Variablen q_i):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{15}$$

6 Aufgaben

1. Bestimme die Langrange-Funktion sowie die Euler-Lagrange-Gleichung für einen Zylinder (Masse M, Radius R), der eine schiefe Ebene im Winkel α herunterrollt (Hinweis: Verwende die Rollbedingung $v = \omega r$ sowie die Formel für die (kinetische) Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$, siehe auch die Formelsammlung zu Drehbewegungen in der Materialliste).
   Löse die Bewegungsgleichungen und berechne, wie lange der Zylinder braucht, um aus dem Stand die Höhe h herunterzurollen. Verallgemeinere diese Rechnung auf einen rollenden Körper mit Trägheitsmoment $J = \kappa MR^2$, $\kappa > 0$.

2. Ein Massepunkt der Masse m wird am Ursprung des $\mathbb{R}^3$ mittels einer Stange der Länge L befestigt. Bestimme die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen für dieses System (Kugelpendel).

3. (Schwierig) Bestimme Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichungen für ein Doppelpendel, dh. zwei Massepunkte mit Massen m_1, m_2 in 2D, die mit einer Stange der Länge L verbunden sind und bei denen der erste mit einer Stange der Länge l mit dem Ursprung verbunden ist.

4. (Schwierig) Bestimmt Lagrange-Funktion und ELG für ein Teilchen in Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten.

5. Bestimme die Freiheitsgrade der obigen Systeme. Herrscht Translations-/Rotations-/zeitliche Symmetrie? Was sind die entsprechenden Erhaltungsgrößen?

6. Gegeben sei ein 1D-System mit verallgemeinerten Koordinate q und Lagrangefunktion
$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mgh - \frac{k}{2}q^2 \ . \tag{16}$$
Bestimmme (und löse) die Bewegungsgleichungen. Nenne ein System, welches durch diese Lagrange-Funktion beschrieben wird.

7. Die Wirkung eines relativistischen Teilchens lautet $-mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int \gamma^{-1} dt$, mit $m > 0$ und γ dem Lorentz-Faktor. Bestimme Bewegungsgleichungen, Energie und Impuls und vergleiche diese mit den üblichen Formeln - sind dies Erhaltungsgrößen? Leite so für ein ruhendes Teilchen $E = mc^2$ her. Wenn das alles interessant klingt, schau dir z.B. auf Wikipedia ("Relativistic Lagrangian Mechanics") an wie man ein elektromagnetisches Feld hinzufügt.

8. Betrachte die Lagrange-Funktion (mit verallgemeinerten Koordinaten x, y, λ)
$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy + \frac{\lambda m}{2}(x^2 + y^2) \ . \tag{17}$$
Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen, und welches bekannte System wird beschrieben? Vergleiche mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren aus der Optimierung mit Nebenbedingungen (*Hinweis*: Substitution von $x = cos(\alpha)$, $y = sin(\alpha)$ könnte hilfreich sein).