Einführung in die Fehlerrechnung

Jede quantitative physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet. Die Angabe der Fehler gehört zu einer ordentlichen Auswertung ebenso dazu, wie die Angabe des eigentlichen Messergebnisses. Es gibt zwei Arten von Fehlern: systematische und statistische Fehler.

I Systematische Fehler

Solche Fehler entstehen, wenn die Versuchsbedingungen in Wirklichkeit anders sind, als vom Experimentator angenommen. Wird z.B. bei der Gewichtsmessung eine Waage verwendet, die falsch skaliert ist und immer 1 kg mehr als das tatsächliche Gewicht anzeigt, so werden alle Messungen mit dieser Waage systematisch ein um 1 kg erhöhtes Ergebnis liefern. Ein weiteres Beispiel ist die Reibung. Ihr Einfluss wird häufig vernachlässigt. Die Schwingungsdauer eines Pendels wird aufgrund der Luftreibung mit der Zeit kleiner - vernachlässigen wir diesen Effekt und verwenden eine im Vakuum gültige Formel um daraus z.B. die Fallbeschleunigung g zu bestimmen, so erhalten wir ein verfälschtes Ergebnis.

Ein guter Experimentator sollte sich über die systematischen Fehler in seinem Experiment bewusst sein und diese nach Möglichkeit eleminieren oder minimieren. Im ersten Beispiel würde das bedeuten, dass die fehlerhafte Waage durch eine andere ausgetauscht werden muss. Im zweiten Beispiel ist es nicht so leicht, den Fehler zu beheben. Man kann den Versuch im Vakuum durchführen - dies wäre jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden. Diese Möglichkeit steht dem Experimentator nicht immer zur Verfügung. Man könnte auch die Formel unter Berücksichtigung der Reibung korrigieren (das ist natürlich auch im Beispiel mit der Waage möglich). In Fällen, in denen weder die Korrektur der Versuchsbedingungen noch der Formeln ohne unverhältnismäßig großem Aufwand möglich sind, muss auf die systematischen Fehler hingewiesen werden. Beim Versuch mit dem Pendel könnte man z.B. schreiben: „Da durch Reibungsverluste die gemessene Schwingungsdauer verringert wird, ist der im Versuch ermittelte Wert für g geringfügig größer, als der tatsächliche Wert.“

Manchmal können sich systematische Fehler auch durch geschicktes Messen vermeiden lassen, obwohl man nur einen fehlerhaften Maßstab zur Verfügung hat. Ein Beispiel ist die Zeitmessung mit einer Stoppuhr, wobei die Reaktionszeit des Experimentators immer eine gewisse Verzögerung, also einen systematischen Fehler erzeugt. Wenn jedoch dieselbe Person Anfangs- und Endzeitpunkt stoppt, kann man davon ausgehen, dass dieser Fehler beide Male auftritt und sich damit weghebt.

II Statistische Fehler

Auch wenn keine systematischen Fehler vorhanden sind wird die mehrmalige Messung einer Größe x niemals exakt übereinstimmende Ergebnisse liefern. Das kommt davon, dass während des Experiments unbeeinflussbare statistische Schwankungen auftreten. Messen wir z.B. die Fallzeit eines Objekts mit der Stoppuhr, so erhalten wir bei jeder Messung ein anderes Ergebnis. Allerdings werden die Messergebnisse in der Umgebung des Mittelwertes am dichtesten liegen, d.h. kleine Abweichungen von $\bar{x}$ häufiger vorkommen als große. Typischerweise sind die Messwerte Gaußverteilt. Da statistische Fehler niemals ganz eliminiert werden können ist unser Ziel, ein Intervall anzugeben, in dem der wahre Wert der zu bestimmenden Größe mit hoher Sicherheit liegt, die sich auch quantifizieren lässt.

Bester Schätzwert für den wahren Wert x ist das arithmetische Mittel aus den n Stichprobenwerten x_i:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ein Maß für die Streuung der Meßwerte um den Mittelwert ist die Standardabweichung s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Eine Größe, die angibt, wie gut der Mittelwert $\bar{x}$ den tatsächlichen Wert annähert ist der Fehler des Mittelwerts u:

$$u = s/\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Man sieht, dass die Güte der Näherung mit wachsendem n zunimmt. Es ist deshalb wichtig, immer genügend viele Messungen zu machen. Die meisten Taschenrechner haben ein Statistikprogramm, das nach Eingabe der Messwerte Mittelwert und Standardabweichung berechnet. Das vollständige Messergebnis muss die Anzahl der Messungen n, den Mittelwert $\bar{x}$ und die Messunsicherheit u enthalten – man schreibt es oft in der Form $x = \bar{x} \pm u$ (systematische Fehler sind ggf. abzuschätzen und zu den statistischen zu addieren). Manchmal gibt man auch die relative Messunsicherheit $u/\bar{x}$ in Prozent an.

III Abschätzung von Messfehlern

Bei vielen Arten von Messungen (wie Längen-, Massen- oder elektrischen Messungen) macht es mehr Sinn den Fehler abzuschätzen, als die Messung oft zu wiederholen. Auf den meisten Messinstrumenten ist der Fehler angegeben (dies ist z.B. bei Waagen, Thermometern oder Multimetern immer der Fall). Eine typische Angabe für Multimeter ist z.B. $\pm(0,2\% rdg. + 1dg.)$. Das bedeutet, dass sich der Fehler aus $0,2\%$ der aktuellen Anzeige (relativer Fehler) und einer Einheit der letzten angezeigten Dezimalstelle (absoluter Fehler) zusammensetzt. Achtung: Oft sind die Fehler für verschiedene Messbereiche verschieden.

Besonders häufig muss man den Fehler einer Längenmessung abschätzen. Misst man eine Länge mit dem Lineal, so ist die Genauigkeit der Messung durch die

Strichbreite der Skala begrenzt. Bei einem gewöhnlichen Lineal beträgt der Strichabstand 1 mm - hier ist eine Schätzung des Ablesefehlers von 0,5 mm realistisch. Für genauere Messungen verwendet man die Schiebelehre (0,1 mm Fehler).

IV Fehlerfortpflanzung

Nur selten kann die uns interessierende Größe direkt gemessen werden. Meist messen wir andere Größen (x, y, z,...) und berechnen die gesuchte Größe G aus den gemessenen mit einer Formel. Dabei übertragen sich die Fehler δx, δy, δz,... bei der Messung natürlich auf den ermittelten Wert für G. Sei $G = G(x, y, z, ...)$ eine Funktion der Messgrößen x, y, z,... Mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz lässt sich der Fehler δG aus den Fehlern der Messgrößen ermitteln:

$$\delta G_{Gauss} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\delta z\right)^2 + \ldots}$$

Dieses Gesetz ist zwar sehr allgemein, doch kann die Fehlerberechnung dafür sehr aufwändig werden. Deshalb empfiehlt es sich oft, stattdessen die Methode der oberen und unteren Grenze anzuwenden. Man bestimmt die obere und die untere Grenze für G, indem man $x \pm \delta x$, $y \pm \delta y$,... mit den jeweils passenden Vorzeichen in die Formel für G einsetzt. Dann berechnet man den Fehler von G,

$$\delta G_{ou} = \frac{G_{max} - G_{min}}{2}.$$

Einige wichtige Spezialfälle werden nun explizit angeführt.

1. Summe bzw. Differenz $G = x \pm y$:

$$\delta G_{Gauss} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$$

$$\delta G_{ou} = |\delta x| + |\delta y|$$

2. Produkt $G = xy$ bzw. Quotient $G = x/y$: Hier ist es günstig, den relativen Fehler anzugeben.

$$\left(\frac{\delta G}{G}\right)_{Gauss} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\delta G}{G}\right)_{ou} = \left|\frac{\delta x}{x}\right| + \left|\frac{\delta y}{y}\right|$$

V Angabe des Endergebnisses mit angemessener Stellenzahl

Wegen der begrenzten Genauigkeit kann das Endergebnis stets nur mit einer endlichen Zahl von signifikanten Ziffern angegeben werden. Zu diesen zählen in der Darstellung einer Fließkommazahl alle Ziffern außer führenden Nullen. Beispiel:

Die Angabe 0,83200 enthält 5 signifikante Ziffern. Auch Fehler sind auf eine angemessene Stellenzahl zu runden und zwar fast alle Fehler auf nur eine signifikante Ziffer. Nur wenn diese eine 1 sein würde, ist eine Angabe auf zwei signifikante Ziffern zulässig. Im Zweifelsfall sollte man bei Fehlern lieber auf- statt abrunden. Natürlich muss das Runden sowohl von Fehlern als auch vom eigentlichen Ergebnis erst ganz zum Schluss erfolgen; in Zwischenrechnungen sollte immer mit möglichst genauen Werten gearbeitet werden. In der endgültigen Angabe des Messergebnisses ist dessen Stellenzahl so zu beschränken, dass die Nummer der letzten Stelle mit der Nummer der letzten Fehlerstelle übereinstimmt. Dabei sollte man Zehnerpotenzen ausklammern. Beispiel: Wir haben einen Messwert von 6223 N mit einem Fehler von 90 N. Diesen würde man wie folgt runden: $(6,22 \pm 0,09) \times 10^3 N$

VI Graphische Auswertung

Manchmal möchte man bei einem Versuch nicht eine bestimmte Größe ermitteln, sondern den funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ aus n gemessenen Wertepaaren (x_i, y_i) bestimmen. Dazu kann man die y_i gegen die x_i grafisch auftragen und schauen, durch welche Kurve sie sich verbinden lassen. Ist die Art der Funktion bekannt, so bietet sich an, eine geeignete Transformation der Koordinatenachsen durchzuführen, die die Kurve in eine Gerade überführt.

Beispiel: Federpendel
Die Schwingungsdauer eines Federpendels wird durch folgende Formel beschrieben:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Wenn wir die Schwingungsdauern T für Pendel mit verschiedenen Massen m messen und gegen m auftragen erhalten wir den Graphen einer Wurzelfunktion. Tragen wir dagegen T^2 gegen m auf, so erhalten wir wegen $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$ eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $4\pi^2/k$.

Die Vorteile einer solchen Transformation liegen klar auf der Hand. Erstens lässt sich sehr leicht überprüfen, ob die Messpunkte wirklich auf einer Geraden liegen (bei anderen Funktionen ist es viel schwieriger). Zweitens kann man aus der Steigung und dem Achsenabschnitt der Geraden oft wichtige Informationen gewinnen. In unserem Beispiel könnten wir graphisch die Federhärte k ermitteln. Außerdem lässt sich mit der graphischen Auswertung der Messfehler einfach bestimmen. Die folgende Abbildung ist ein Beispiel für die graphische Auswertung einer Messreihe zur Schwächung der Gamma-Strahlung durch Blei. Die Abhängigkeit der Zählrate Z_p von der Dicke der Bleischicht x ist exponentiell – um einen linearen Zusammenhang zu bekommen wurde der Logarithmus der Zählrate gegen x aufgetragen. Man sieht, dass die Messpunkte statistisch um eine Gerade verteilt sind. Zur Auswertung der Messreihe wird in ihrer grafischen Darstellung nach Augenmaß eine Gerade gezeichnet, von der die Messpunkte möglichst wenig abweichen sollen. Zur Bestimmung der Steigung wird ein (möglichst großes) Steigungsdreieck eingezeichnet. Die Steigung ist dann gleich dem Verhältnis der Katheten. Achtung: Man darf nicht einfach die Kathetenlängen durcheinander dividieren, sondern muss die entsprechenden Größen in den richtigen Einheiten ablesen! Zur Fehlerbestimmung wird zunächst der Bereich eingegrenzt, in dem sich abweichende Geraden befinden können (Fehlerstreifen). Der Fehlerstreifen muss so angelegt werden, dass mindestens zwei Drittel der Messpunkte innerhalb liegen. Zeichnen der Diagonalen des Fehlerstreifens liefert zwei abweichende Geraden, die sich im Schwerpunkt der Messpunkteverteilung schneiden. Von den abweichenden Geraden werden ebenfalls mit Hilfe von Steigungsdreiecken die Steigungen (a_{max} und a_{min}) berechnet. Aus ihnen ergibt sich der Fehler der Steigung a der optimalen Geraden:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}.$$

Oft möchte man zu einem konkreten Abszissenwert den Ordinatenwert bestimmen (z.B. den y-Achsenabschnitt der Geraden). Dazu zeichnet man eine auf den Wert senkrechte Gerade und liest die Ordinate mit Fehler ab. Das gleiche kann man natürlich auch umgekehrt machen.

Die graphische Methode hat den Vorteil, dass sie sehr schnell und einfach ist, allerdings ist das Einzeichnen der Geraden nach Augenmaß nicht exakt. Es gibt aber auch ein objektives Verfahren, die lineare Regression. Dabei werden Steigung und y-Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden so bestimmt, dass die Summe der Abweichungsquadrate zwischen Gerade und Messpunkten minimal wird. Die Statistikprogramme der meisten Taschenrechner beherrschen dieses Verfahren, es ist allerdings zu komplex um in kurzer Zeit "von Hand" durchgeführt zu werden.