

# Geometrische Optik

Felix Wechsler

2. April 2020

## **Zusammenfassung**

Dieses Skript dient als Handreichung zum Vortrag *Geometrische Optik* welcher im Rahmen des Orpheus-Seminars 2019 in Kiel [www.orpheus-verein.de](http://www.orpheus-verein.de) das erste mal von mir abgehalten wurde. Auch sonst ist dieses Skript umfangreicher geschrieben als, dass man es in einem Seminar an die Tafel abschreiben könnte. Viele Sätze wurden nur mündlich erwähnt.

Über Fehler freue ich mich zwar nicht, aber ich hoffe, dass ihr mir eine Mail<sup>1</sup> schreibt, damit ich diese ausbessern kann.

<sup>1</sup>[fxw+orpheus@mailbox.org](mailto:fxw+orpheus@mailbox.org)

# 1 Annahmen

Eine der Annahmen der geometrischen Optik ist, dass Licht aus Strahlen besteht. Das ist natürlich unphysikalisch und entspricht nicht der Realität. Somit lassen sich auch eigentlich keine Experiment durchführen, die mit der Geometrischen Optik vereinbar sind. Allerdings lassen sich viele Phänomene wie Brechung oder Linsenabbildungen mit Strahlenoptik sehr gut sowohl qualitativ als auch quantitativ beschreiben. Eine weitere Vereinfachung ist die *paraxiale Optik*, bei der man sogar annimmt, dass Strahlen nur in sehr kleinen Winkeln relativ zur Ausbreitungsrichtung unterwegs sind. Es gilt in der paraxialen Optik:

$$y(x) = y_0 + x \cdot \tan \varphi \approx y_0 + x \varphi \quad (1)$$

Diese Einschränkung ist notwendig, um z.B. für Linsen oder Spiegel einfache geschlossene mathematische Ausdrücke zu erhalten.

## 1.1 Axiome

Folgende Axiome lassen sich für die Strahlenoptik postulieren:

1. In homogenem Material bewegen sich Lichtstrahlen gerade.
2. Am Übergang zwischen zwei homogenen Materialien bewegt sich das Licht im Allgemeinen nach dem Reflexions- und Brechungsgesetz weiter.
3. Der Strahlengang ist umkehrbar, die Richtung eines Lichtstrahls ist egal
4. Lichtstrahlen kreuzen einander, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

# 2 Reflexion und Brechung

Im Folgenden werden wir das Reflexionsgesetz angeben und das Brechungsgesetz mit Hilfe des Fermatschen Prinzips herleiten.

## 2.1 Reflexionsgesetz

Das Reflexionsgesetz besagt, dass wenn ein Strahl auf eine reflektierende Oberfläche (z.B. Spiegel) trifft, so ist der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel. Zu sehen ist dieser Vorgang in Abbildung 1.

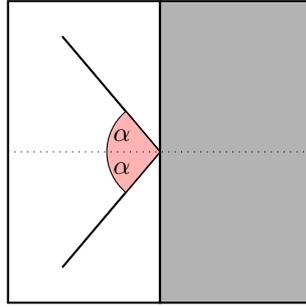


Abbildung 1: Ein Strahl trifft auf eine reflektierende Oberfläche.

## 2.2 Fermatsches Prinzip

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht zwischen zwei Punkten A und B einen Weg nimmt, sodass die Lichtlaufzeit extremal ist. Dazu muss man wissen, dass die Geschwindigkeit von Licht in Vakuum den Wert  $c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  hat. In einem anderen Medium mit dem Brechungsindex  $n$  besitzt Licht die Geschwindigkeit  $c_n = \frac{c}{n}$ . Der Brechungsindex ist dabei eine Materialeigenschaft und bestimmt die Geschwindigkeit von Licht in diesem Medium.

## 2.3 Brechungsgesetz

Das Brechungsgesetz beschreibt den Strahlenverlauf eines Lichtstrahls der mit einem Winkel  $\alpha$  auf ein Medium mit einem anderen Brechungsindex trifft.

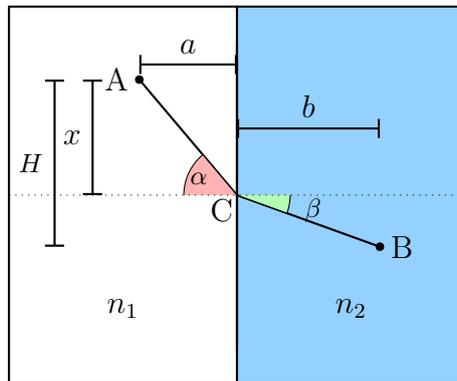


Abbildung 2: Ein Strahl tritt von einem Medium mit Brechungsindex  $n_1$  in ein Medium mit Brechungsindex  $n_2$  über.

Laut dem Fermatschen Prinzip wird dabei zwischen den Punkten A und B die Lichtlaufzeit einen extremalen Wert einnehmen. Die Lichtlaufzeit berechnet sich mit den üblichen Geschwin-

digkeitsbeziehungen:

$$t_{\text{ges}} = t_{\text{AC}} + t_{\text{textAC}} = \frac{d_{\text{AC}}}{v_1} + \frac{d_{\text{CB}}}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(H-x)^2 + b^2}}{c/n_2} \quad (2)$$

wobei die Geschwindigkeiten mit dem Brechungsindex  $n_1$  und  $n_2$  ausgedrückt wurden. Zudem wurde der Satz des Pythagoras für die Strecken benutzt. Nach dem Fermatschen Prinzip wird die Lichtlaufzeit extremal. Um das Extremum zu finden, leiten wir  $t_{\text{ges}}$  nach  $x$ . Denn  $x$  ist die einzige Variable wovon die Lichtlaufzeit bei einer geradlinigen Bewegung im jeweiligen Medium abhängt.

$$\frac{dt_{\text{ges}}}{dx} = 0 = \frac{x \cdot n_1}{c \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{(H-x) \cdot n_2}{c \cdot \sqrt{(H-x)^2 + b^2}} \quad (3)$$

Die beiden  $c$  Faktoren kann man einfach durch Multiplikation entfernen. Zudem lassen sich folgende Identitäten finden:

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (4)$$

$$\sin \beta = \frac{(H-x)}{\sqrt{(H-x)^2 + b^2}} \quad (5)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung 3 zu:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta \quad (6)$$

Gleichung 6 ist das fertige Brechungsgesetz. Es gibt einen Zusammenhang zwischen Einfallswinkel und gebrochenen Winkel im Übergang zwischen zwei Medien. Es lässt sich erkennen, dass der Winkel  $\beta$  kleiner wird sobald der Brechungsindex  $n_2 > n_1$ . Licht wird also immer zum Lot des optisch dichterem Medium gebrochen. Optisch dichter ist gleichbedeutend mit einem höherem Wert des Brechungsindex.

### 3 Spiegel und Linsen

In diesem Abschnitt möchten wir die beiden Grundelemente optischer Abbildungen einführen, Spiegel und Linsen.

#### 3.1 Hohlspiegel

Der Hohlspiegel, in Abbildung 3 zu sehen, ist ein optische Bauelement, welches parallel einfallendes Licht auf einen Fokuspunkt fokussieren kann.

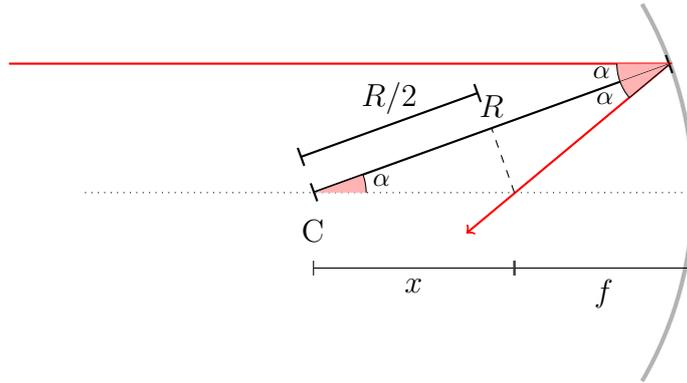


Abbildung 3: Ein Hohlspiegel mit einem einfallenden Lichtstrahl.

In Übereinstimmung mit paraxialer Optik nehmen wir an, dass die Strahlen nah zur optischen Achse des Spiegels verlaufen. Der rote Lichtstrahl trifft auf dem Spiegel auf, die Winkel sind durch das Reflexionsgesetz gegeben. Aufgrund des parallelen Lichtstrahls zum Boden, taucht der Winkel am Zentrum erneut auf. Dadurch entsteht ein gleichschenkliges Dreieck. Durch Trigonometrie erhält man:

$$\cos \alpha = \frac{R/2}{x} \quad (7)$$

Damit erhält man für  $x$  und für kleine Winkel  $\alpha$ , sodass auch gilt  $\cos \alpha \approx 1$ :

$$x = \frac{R/2}{\cos \alpha} \approx \frac{R}{2} \quad (8)$$

Damit können wir auch die Brennweite, also den Abstand vom Spiegel zum Brennpunkt angeben:

$$f = \frac{R}{2} \quad (9)$$

Diese Formel gilt bei Hohlspiegel nur für achsennahe Strahlen. Ein Spiegel, der wirklich für alle Einfallswinkel einen perfekten Brennpunkt hat, ist der Parabolspiegel.

### 3.2 Linse

Ein Spiegel erreicht durch Reflexion die Fokussierung von parallelen Strahlen. Eine Linse erreicht ebenfalls eine Fokussierung von Strahlen, allerdings basierend auf Brechung. In Abbildung 4 ist der schematische Verlauf eines Lichtstrahls gezeichnet. Eine Linse besteht dabei an den beiden Oberflächen aus Kugelschalen bzw. im Querschnitt aus zwei Kreissegmenten. Im Allgemeinen sind die Krümmungsradien der beiden Oberflächen  $R_1$  und  $R_2$ . Die Zusammenhänge der Winkel an den Oberflächen sind durch das Brechungsgesetz gegeben. Anhand dieser Skizze sieht man bereits, dass eine Linse einen zum Boden parallelen Strahl auf einen Punkt fokus-

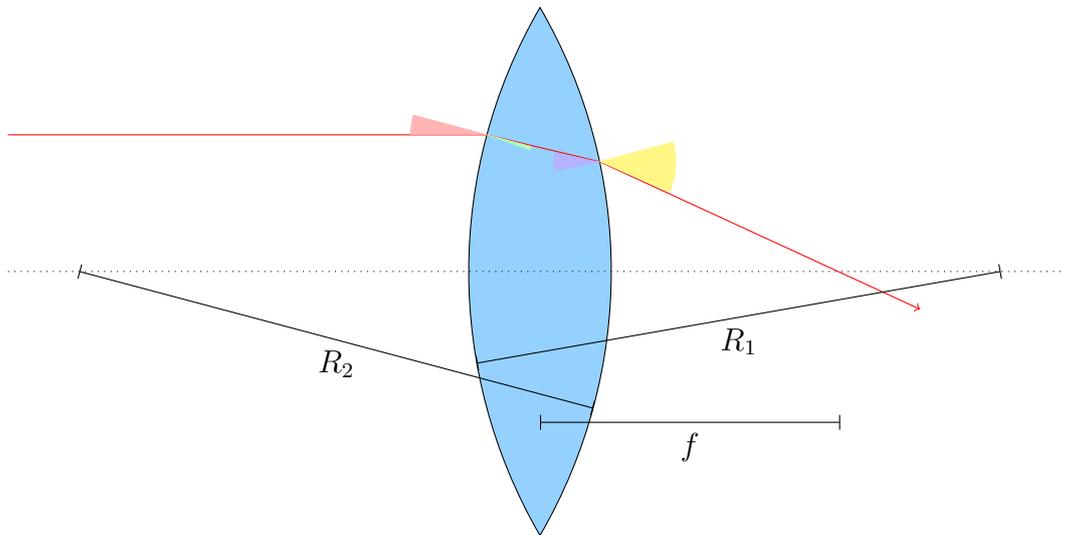


Abbildung 4: Strahlengang bei einer fokussierenden Linse

siert. Tatsächlich fokussiert eine Linse sogar alle parallel einfallenden Lichtstrahlen auf einen Punkt, unabhängig von der Höhe, mit der der Lichtstrahl auf die Linse trifft. Einen Beweis wollen wir an dieser Stelle hierfür nicht geben. Die Distanz hinter der Linse, auf der das Licht fokussiert wird, nennt man Brennweite. Ohne Beweis geben wir die Linsenschleifer Formel an, mit der die Brennweite berechnet werden kann:

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n_0}{n_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - n_0)d}{nR_1R_2} \right) \quad (10)$$

$n$  ist der Brechungsindex des Linsenmaterials, für Glas ist  $n \approx 1.5$ .  $n_0$  ist der Brechungsindex des umgebenden Mediums, meistens Luft mit  $n \approx 1$ .  $d$  ist die Dicke der Linse. Spricht man von einer idealen, dünnen Linse so setzt man  $d = 0$ . Für eine ideale Glaslinse in Luft vereinfacht sich Gleichung 10 zu:

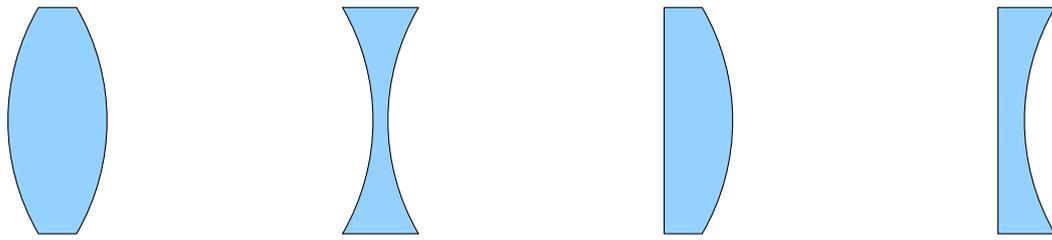
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (11)$$

$R_1$  und  $R_2$  sind die beiden Krümmungsradien der Oberfläche. Für die Krümmungsradien gibt es eine Vorzeichenregel, die beachtet werden muss.

**Hinweis 3.1**

Der Krümmungsradius einer Oberfläche ist dann positiv, wenn der Lichtstrahl zuerst auf die Oberfläche trifft und erst danach den Krümmungsmittelpunkt passiert. Passiert der Lichtstrahl zuerst den Mittelpunkt und danach die Oberfläche, so ist der Krümmungsradius mit einem negativen Vorzeichen zu verwenden.

In Abbildung 5 sehen wir eine kleine Übersicht verschiedener Linsen mit verschiedenen Krümmungsradien.



(a) Bikonvex:  $R_1 > 0, R_2 < 0, f > 0$     (b) Bikonkav:  $R_1 < 0, R_2 > 0, f < 0$     (c) Plankonvex:  $R_1 = \infty, R_2 < 0, f > 0$     (d) Plankonkav:  $R_1 = \infty, R_2 > 0, f < 0$

Abbildung 5: Übersicht einiger Linsenarten

Was eine negative Brennweite bedeutet, werden wir nachher noch sehen.

## 4 Konzept der Abbildung

Linsen und Spiegel können aber nicht nur Strahlen auf einen Punkt fokussieren, sondern auch Gegenstände optisch abbilden und somit vergrößern, verkleinern oder verkehrt herum darstellen.

### 4.1 Abbildung einer fokussierenden Linse

Objekte senden in der Realität kein Licht aus, sondern streuen und reflektieren einfallendes Licht in alle Richtungen. Deshalb können wir einen Gegenstand meistens auch aus verschiedenen Richtungen sehen. Das eigentlich Besondere an einer Linse ist, dass sie Licht, das in beliebige Richtungen von einem Objekt wegstrahlt, wieder an ihren relativen Ort zurück projizieren kann.

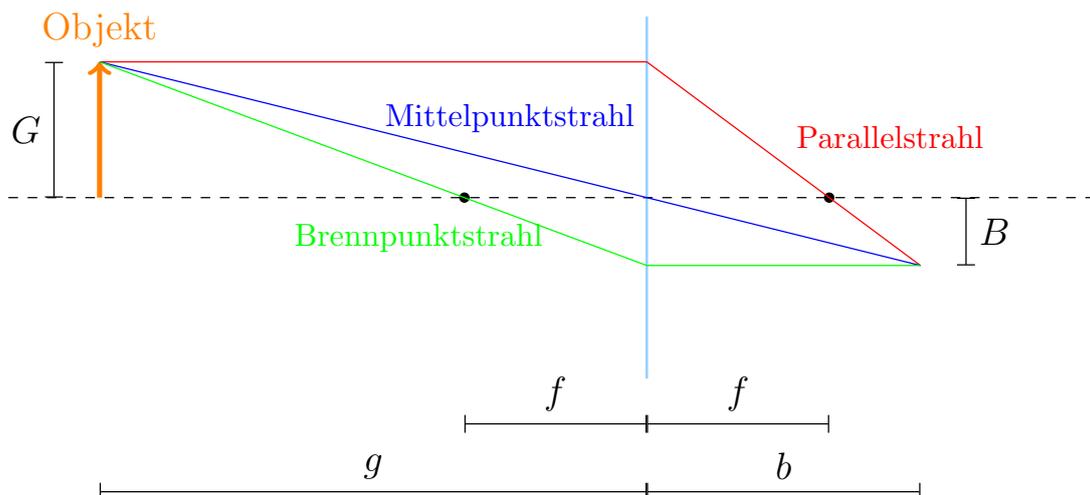


Abbildung 6: Abbildung an einer Linse mit positiver Brennweite. Die Linsengeometrie ist für die Konstruktion egal und wird weggelassen, wichtig ist nur dass die Brennweite positiv ist.

Dieses Zurückprojektion bezeichnet man als Bild des Objekts.

Sehen wir uns in Abbildung 6 die Spitze des Objekts an. Wir haben hier genau drei Strahlen eingezeichnet und vergessen nun alle anderen Richtungen. Wir wissen, dass der Parallelstrahl auf einen Punkt fokussiert wird, dem Brennpunkt. Dadurch ergibt sich der rote Strahlenverlauf. Über den Brennpunktstrahl wissen wir, dass er zu einem Parallelstrahl werden muss. Dies folgt aus der Umkehrbarkeit von Lichtstrahlen. Der Mittelpunktstrahl verläuft ungehindert durch die Linse hindurch. Es gibt nun einen Punkt auf der anderen Seite der Linse, an dem sich alle Strahlen schneiden. Genau an diesem Punkt führt die Linse alle drei Strahlen an ihren ursprünglichen relativen Ort zurück. Man kann zeigen, dass nicht nur diese drei Strahlen an ihren Ort zurück geführt werden, sondern alle Strahlen die in beliebige Richtungen vom Objekt abstrahlen.

Wenn wir diese Strahlenkonstruktion für alle Punkte des Objektes machen erhalten wir eine vollständige Abbildung des Objekts. Die Größe  $g$  nennt man Gegenstandsweite und ist die Distanz des Objekts zur Linse.  $b$  ist die Bildweite und ist die Distanz des Bildes zur Linse. Um das Bild sehen zu können, können wir dort ein weißes Papier oder einen Schirm aufstellen.

Wir wollen nun eine Gleichung herleiten, welche die Größen  $g$ ,  $b$  und  $f$  in Beziehung zueinander setzt. Nach dem Strahlensatz gilt für den blauen Mittelpunktstrahl:

$$\frac{G}{B} = \frac{g}{b} \quad (12)$$

Für den roten Parallelstrahl gilt eine ähnliche Beziehung:

$$\frac{G}{B} = \frac{f}{b - f} \quad (13)$$

Wir können beide gleich setzen und die Nennen multiplizieren:

$$g \cdot (b - f) = bf \quad (14)$$

$$gb = bf + gf \quad (15)$$

Wir können nun beide Seiten durch  $g$ ,  $b$  und  $f$  teilen und erhalten:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (16)$$

Diese Gleichung nennt sich die **Abbildungsgleichung**, denn sie beschreibt an welchem Ort sich das Bild eines Objektes befindet.

## 4.2 Abbildung einer defokussierenden Linse

Es gibt jedoch nicht nur Linsen die Licht fokussieren können, sondern auch solche die das Licht defokussieren. Bei solchen Linsen ist die Brennweite negativ.

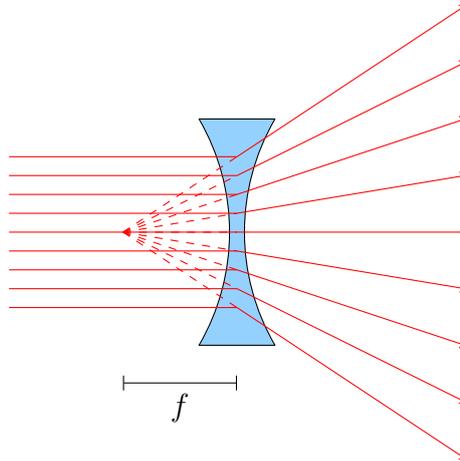


Abbildung 7: Eine bikonkave Linse wirkt defokussierend.

Ähnlich wie eine fokussierende Linse, kann auch eine defokussierende Linse ein Bild eines Objekts erzeugen. Dieses Bild wird jedoch virtuell bezeichnet, da man es nicht mit einem Schirm sehen kann, sondern z.B. nur mit dem menschlichen Auge.

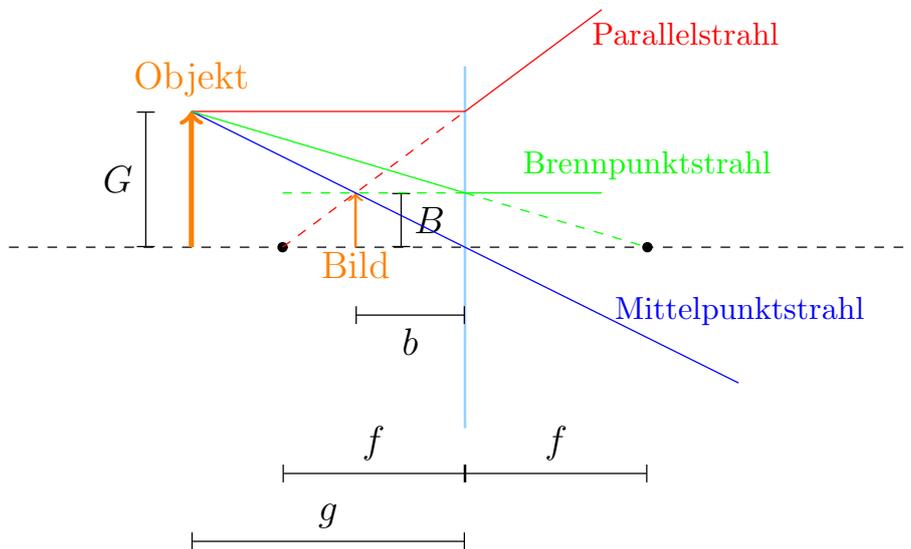


Abbildung 8: Abbildung an einer Linse mit negative Brennweite.

Die Konstruktion für eine defokussierende Linse sehen wir in Abbildung 8. Der rote Parallelstrahl wird wie bisher zu einem Brennpunkt abgelenkt. Da die defokussierende Linse jedoch

das Licht zerstreut, geht nur die gestrichelte rote Verlängerung durch den Brennpunkt. Der Brennpunktstrahl wird zu einem parallelen Strahl. Aber erneut geht nur die gestrichelte Verlängerung durch den Brennpunkt, welche dann zu parallelem Licht wird. Der Mittelpunktstrahl bleibt in der Konstruktion gleich. Das Bild entsteht nun am Schnittpunkt der gestrichelten Linien. Das liegt daran, dass das Auge bei Lichtstrahlen annimmt, dass diese sich geradlinig bewegen. Wenn wir also die Linse nicht sehen, so denken wir, dass die Lichtstrahlen eben geradlinig von diesem Schnittpunkt kommen müssen. Möchten wir Gleichung 16 verwenden, muss  $f$  mit dem negativen Wert eingesetzt werden. Auch  $b$  wird negativ sein, da die Distanz auf der anderen Seite der Linse ist.

## 5 Abbildung eines Hohlspiegels

Nicht nur Linsen, sondern auch Spiegel können ein Bild erzeugen. Für einen Hohlspiegel sehen wir die Konstruktion in Abbildung 9. Der rote Parallelstrahl wird durch den Brennpunkt reflektiert. Der blaue Mittelpunktstrahl fällt symmetrisch wieder aus. Der grüne Brennpunktstrahl wird parallel zum Boden reflektiert.

Das reelle Bild lässt sich nun wieder mit einem Schirm beobachten, es steht kopfüber. Auch für

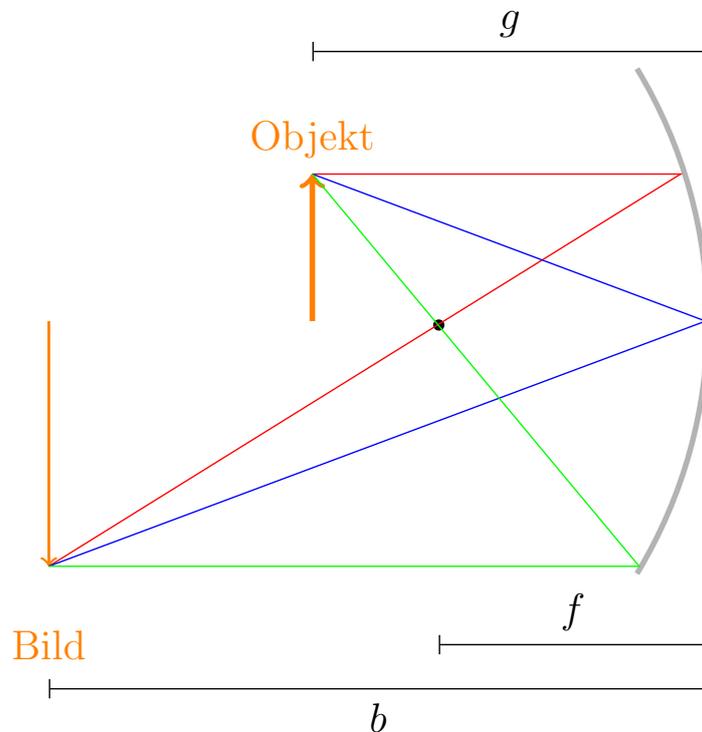


Abbildung 9: Abbildung an einem Hohlspiegel

Spiegel gilt die Abbildungsgleichung Gleichung 16. Die Brennweite beim Hohlspiegel ist positiv. Die Größen  $g$  und  $b$  sind positiv, sofern sie sich links vom Spiegel befinden. Es gibt Fälle in denen ist das Bild rechts vom Spiegel virtuell zu sehen, dort ist dann  $b$  negativ.

## Literatur

- [Leh11] P. Lehn Rudolf und Breithfeld. *Abriss der Geometrischen Optik*. 2011.
- [Wik19a] Wikipedia. *Geometrische Optik* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometrische%20Optik&oldid=178021829>. [Online; accessed 26-September-2019]. 2019.
- [Wik19b] Wikipedia. *Linse (Optik)* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Linse%20\(Optik\)&oldid=191501600](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Linse%20(Optik)&oldid=191501600). [Online; accessed 26-September-2019]. 2019.