Spezielle Relativitätstheorie

Fabian Gundlach

13. Oktober 2010

Die spezielle Relativitätstheorie untersucht die verschiedenen Sichtweisen von *Beobachtern* in *Inertialsystemen.*
Ein *Inertialsystem* ist dabei ein System, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. Grob gesagt ist es also ein unbeschleunigtes Bezugssystem.
Ein *Beobachter* beobachtet die Vorgänge aus der Sicht eines Inertialsystems. Er ist „immer überall“ und bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit. Er merkt es also sofort, wenn etwas passiert und kann die Zeit- und Ortskoordinaten eines solchen *Ereignisses* ermitteln. Dazu wird ein Zeitpunkt 0 und ein Orts-Koordinatensystem in seinem Bezugssystem festgelegt.
Im Folgenden werden wir zwei Bezugssysteme A und B betrachten. Die Koordinaten, die ein Beobachter in A für ein Ereignis ermitteln würde, bezeichnen wir in der Form t,x,y,z. Die Koordinaten, die ein Beobachter in B dem selben Ereignis zuordnen würde, kennzeichnen wir mit einem Strich: t',x',y',z'. Die Koordinatensysteme von A und B sollen die selbe Richtung haben. Außerdem stellen die beiden Beobachter ihre Uhren und verschieben ihre Zollstöcke so, dass beide einunddasselbe Ereignis zur Zeit 0 und am Ort (0,0,0) messen würden.
A bewege sich relativ zu B mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung.
In allen Inertialsystemen gelten die gleichen Naturgesetze. Man kann nicht entscheiden, ob man sich bewegt. Es wird sogar beobachtet, dass sich Licht im Vakuum in jedem Inertialsystem unabhängig von der Quelle mit der Geschwindigkeit $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ausbreitet (anders als z.B. ein aus dem Zug geworfener Ball, der je nach Beobachter eine andere Geschwindigkeit hat).

1 Gegenüberstellung von klassischer Galileo- und relativistischer Lorentztransformation

In der folgenden Tabelle stehen die Umrechnung von A- in B-Koordinaten sowohl mithilfe der „normalen“ klassischen Galileotransformation, als auch mithilfe der „anormalen“ relativistischen Lorentztransformation.

	klassisch	**relativistisch**
$t' =$	t	$\gamma\left(t+\frac{xv}{c^2}\right)=\frac{t+\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$x' =$	$x+tv$	$\gamma\left(x+tv\right)=\frac{x+tv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$y' =$	y	y
$z' =$	z	z
$u' =$	$v+u$	$\frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$

In der Relativitätstheorie setzt man meistens $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $\beta = \frac{v}{c}$.

Merkregeln: Man kann sich die Formeln schnell wieder selbst überlegen, wenn man noch etwa ihre Struktur kennt. Man sollte sich merken, dass bei t' und x' immer $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ im *Nenner* steht. Außerdem ist das Vorzeichen im Zähler bei diesen beiden Transformationen das gleiche (und auch das gleiche wie in der klassischen Transformation von x').

Wenn man sich nicht sicher ist, kann man ausprobieren, ob für kleine Geschwindigkeiten die Galileotransformationen rauskommen und ob die Vakuumlichtgeschwindigkeit konstant ist (wenn man in die Geschwindigkeitsaddition $u = c$ einsetzt, sollte c rauskommen).

Natürlich gelten die Lorentztransformationen auch, wenn man von B nach A transformiert. Dann muss man natürlich v durch $-v$ ersetzen (also z.B. $x = \gamma(x' - t'v)$).

2 Zeitdilatation

Angenommen es bewegt sich mit A ein geheimnisvoller kleiner Kasten mit Bildschirm und einigen Tasten mit. Bei eingelegter SIM-Card klingelt dieser Kasten nun zwei mal nacheinander. Wir möchten ausrechnen, wie groß der zeitliche Abstand T' des Klingelns von B aus gesehen ist, wenn wir den zeitlichen Abstand T kennen, den A misst.

Die beiden Anrufe haben im Bezugssystem A die t- und x-Koordinaten t_1,x bzw. t_2,x und im Bezugssystem B die Koordinaten t'_1,x'_1 bzw. t'_2,x'_2.

Mithilfe der Lorentztransformationen kann man jetzt leicht t'_1 und t'_2 ausrechnen:

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 + \frac{xv}{c^2}\right)$$

und

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 + \frac{xv}{c^2}\right)$$

Also ergibt sich:

$$T' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma T = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

γ ist größer als 1, d.h. T' ist größer als T, d.h. B wartet länger als A.

Aufgabe: Ein Myon bewegt sich von der Erde aus gesehen mit 98% der Lichtgeschwindigkeit. Ein ruhendes Myon zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. $1{,}5 \cdot 10^{-6}$s. Wie groß

ist seine Halbwertszeit von der Erde aus gesehen? $7{,}5 \cdot 10^{-6}$s
Dadurch lassen sich Myonen auch noch auf der Erdoberfläche nachweisen, obwohl sie in 10km Höhe erzeugt werden und in einer Halbwertszeit nur ca. 440m weit fliegen.

3 Längenkontraktion

Betrachte einen Stab, der sich mit A mitbewegt und der in Bewegungsrichtung liegt. Er habe im Bezugssystem A die Länge L.
Nun misst auch B die Länge des Stabes. Dazu kann er zur selben B-Zeit t' das vordere und das hintere Ende des Stabes orten (wobei sich die x'-Koordinaten x'_1 und x'_2 ergeben) und dann die Differenz dieser x'-Koordinaten ermitteln.
Also misst B für die Länge des Stabes $L' = x'_2 - x'_1$.
Betrachten wir nun die t- und x-Koordinaten der Ereignisse, wenn B das vordere bzw. das hintere Ende des Stabes ortet. Im Bezugssystem B haben diese die Koordinaten t',x'_1 bzw. t',x'_2 und im Bezugssystem A die Koordinaten t_1,x_1 bzw. t_2,x_2.
Mithilfe der Lorentztransformation können wir nun x_1 und x_2 berechnen:

$$x_1 = \gamma(x'_1 - t'v)$$

und

$$x_2 = \gamma(x'_2 - t'v)$$

Zusammen ergibt sich:

$$L = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma L'$$
$$\Rightarrow L' = \frac{1}{\gamma}L = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\frac{1}{\gamma}$ ist kleiner als 1, d.h. L' ist kleiner als L, d.h. B erscheint der Stab, den A dabei hat kürzer als A. $\Rightarrow$ Längen*kontraktion*.

4 Geschwindigkeitsaddition

Die Geschwindigkeitsaddition lässt sich aus den Koordinaten-Lorentztransformationen herleiten.
Dazu betrachten wir ein Raumschiff, dass im Bezugssystem von A mit der Geschwindigkeit u in x-Richtung fliegt. Weil die Beobachter nicht so gut sehen, können sie das Raumschiff nur zweimal wahrnehmen, nämlich dann, wenn der Kapitän laut schreit.
Die Koordinaten dieser beiden Schreie im Bezugssystem A seien t_1,x_1 bzw. t_2,x_2 und die im Bezugssystem B seien t'_1,x'_1 bzw. t'_2,x'_2.
Dann misst A für die Geschindigkeit:

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

und B misst:

$$u' = \frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'}$$

Setzt man die Lorentztransformationen ein, so kommt raus:

$$u' = \frac{\gamma(x_2 + t_2 v) - \gamma(x_1 + t_1 v)}{\gamma\left(t_2 + \frac{x_2 v}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 + \frac{x_1 v}{c^2}\right)} = \frac{(x_2 - x_1) + (t_2 - t_1)v}{(t_2 - t_1) + (x_2 - x_1)\frac{v}{c^2}} = \frac{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + v}{1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{v}{c^2}} = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}}$$

Man kann noch ein paar Plausibilitätstests machen:

- Wenn man $v = 0$ bzw. $u = 0$ setzt, ist u' gleich u bzw. v.
- Wenn man $v = c$ bzw. $u = c$ setzt, ist u' gleich c, d.h. die Lichtgeschwindigkeit hängt nicht vom Beobachter ab:

$$u' = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{v + c}{\frac{1}{c}(c + v)} = c$$

5 Relativistische Energie

Die relativistische Gesamtenergie beträgt $E = \gamma m_0 c^2$, wobei m_0 die sogenannte Ruhemasse des Körpers ist, d.h. die Masse, die der Körper hat, wenn er sich nicht bewegt. γm_0 wird als die relativistische Masse m bezeichnet, d.h. $E = mc^2$. Die Ruheenergie E_0 ist $m_0 c^2$ (da für $v = 0$ $\gamma = 1$ gilt). Damit ist die kinetische Energie E_{kin} gleich $E - E_0 = (\gamma - 1) m_0 c^2$.
Aufgabe: Die Sonne strahlt mit einer Leistung von ca. $3{,}8 \cdot 10^{26}$W. Wie viel Masse verliert die Sonne pro Sekunde? $4{,}2 \cdot 10^{9}$kg
Aufgabe: Ein Positron und ein Elektron mit vernachlässigbaren Geschwindigkeiten treffen sich. Beim Zerstrahlen emmitieren sie zwei Photonen in entgegengesetzte Richtungen. Wie groß ist die Energie und die Wellenlänge eines Photons? Die Masse eines Elektrons beträgt $9{,}1 \cdot 10^{-31}$kg. Das Plancksche Wirkungsquantum h beträgt ca. $6{,}6 \cdot 10^{-34}$Js. $8{,}2 \cdot 10^{-14}$J; $2{,}4 \cdot 10^{-12}$m
Aufgabe: Fe^{56} (bestehend aus 26 Protonen und 30 Neutronen) hat eine Kernbindungsenergie von 8,8MeV pro Kernteilchen. Es gilt $m_p \approx 938.3\frac{\text{MeV}}{c^2}$ und $m_n \approx 939.6\frac{\text{MeV}}{c^2}$. Berechne die Masse und den Massendefekt von Fe^{56}! $52091\frac{\text{MeV}}{c^2}$; $492{,}8\frac{\text{MeV}}{c^2}$

6 Relativistischer Impuls

Es stellt sich die Frage, welche Beschleunigung a ein Körper der Ruhemasse m_0 erfährt, wenn eine Kraft F auf ihn wirkt. Klassisch gilt bekanntermaßen $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}$, d.h. $m_0 \vec{a} = \dot{\vec{p}} = \vec{F}$.
Auch relativistisch gilt $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. Der Impuls erfüllt allerdings $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$.

Wenn man den Impuls $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$ nach der Zeit t ableitet, erhält man also die Kraft F:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \gamma m_0 \vec{a} + \gamma^3 m_0 \vec{v} \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}$$

Wenn die Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung steht, gilt damit:

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma m_0}$$

und wenn die Kraft in Bewegungsrichtung ist, gilt:

$$\vec{F} = \gamma^3 m_0 \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{\gamma^3 m_0}$$

Es gilt also sehr grob gesagt: Ein Körper mit Ruhemasse m_0 hat senkrecht zur Bewegungsrichtung die träge Masse γm_0 und in Bewegungsrichtung die träge Masse $\gamma^3 m_0$.

Es lässt sich mithilfe der Formeln für die Energie und den Impuls folgende Beziehung herleiten, die als *Energie-Impuls-Beziehung* bezeichnet wird: $E^2 = E_0^2 + (cp)^2$ $(= (m_0 c^2)^2 + (cp)^2)$

7 Praktische Tipps

- Man kann sich oft Schreibarbeit sparen, indem man wie in diesem Skript die Substitutionen $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ durchführt. Dann gilt $\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2} = 1$.
- In Aufgaben der Physikolympiade braucht man meistens nicht die Lorentztransformation für die einzelnen Koordinaten, sondern vor allem Geschwindigkeitsaddition $v_{1+2} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$, Zeitdilatation $\Delta t' = \gamma \Delta t$, Längenkontraktion $\Delta x' = \frac{1}{\gamma}\Delta x$, $E = \gamma m_0 c^2$ und Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = E_0^2 + (cp)^2$.
- Im Normalfall muss man erst dann relativistisch rechnen, wenn $v \geq 0{,}1c$ ist (für $v < 0{,}1c$ gilt $\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 < 0{,}6\%$).

8 Paradoxa

8.1 Das Zwillingsparadoxon

Von den zwei Zwillingen Hans und Sepp fliegt Hans ganz schnell ganz weit weg und kommt irgendwann wieder zurück. Beide denken nun aufgrund der Zeitdilatation müsse der andere viel jünger sein. Wer hat Recht?
Auflösung: Sepp hat Recht. Nur er darf die Zeitdilatation einfach so anwenden, weil nur er sich in einem Inertialsystem befindet (Hans muss beschleunigen um von der Erde weg und wieder zurück zu kommen!).

8.2 Zeitdilatation?

Hans und Sepp fliegen aneinander vorbei. Aufgrund der Zeitdilatation denken beide vom anderen, dass bei dem anderen die Uhren langsamer gehen. Wer hat Recht?
Auflösung: Beide! Das ist kein Widerspruch, weil die beiden nicht überprüfen können, wer Recht hat. Dazu müsste einer stehen bleiben, dann befände er sich aber nicht mehr in einem Inertialsystem.

8.3 Garagenparadoxon

Ein Auto fährt sehr schnell in eine Garage, die knapp länger ist als das ruhende Auto. Aus der Sicht der Garage passt das Auto wegen der Lorentzkontraktion locker hinein. Aus der Sicht des Autos passt es aber nicht heinein, da von diesem aus gesehen die Gerage lorentzkontrahiert ist. Wer hat Recht, das Auto oder die Garage?
Auflösung: Beide bzw. keiner! Dies liegt an der *Relativität der Gleichzeitigkeit*.
Die Garage stellt fest: Ich kann das Tor zur Zeit t_1 bei x_1 schließen, wenn zur Zeit $t_2 = t_1$ bei x_2 das Auto durch die Garagenmauer auf der anderen Seite kracht. Aus der Sicht der Garage finden also diese beiden Ereignisse gleichzeitig statt.
Das Auto sagt aber: Die Garage kann ihr Tor erst zur Zeit t_1' geschlossen haben, nachdem ich durch die Mauer zur Zeit t_2' gefahren bin. Also finden die beiden Ereignisse nicht gleichzeitig statt. Dies folgt auch direkt aus der Lorentztransformation für die Zeit:

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \gamma\left(t_1 - \frac{v(x_1 + L)}{c^2}\right) \neq \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = t_1'$$

$\Rightarrow$ Auch die Gleichzeitigkeit hängt vom Beobachter ab.

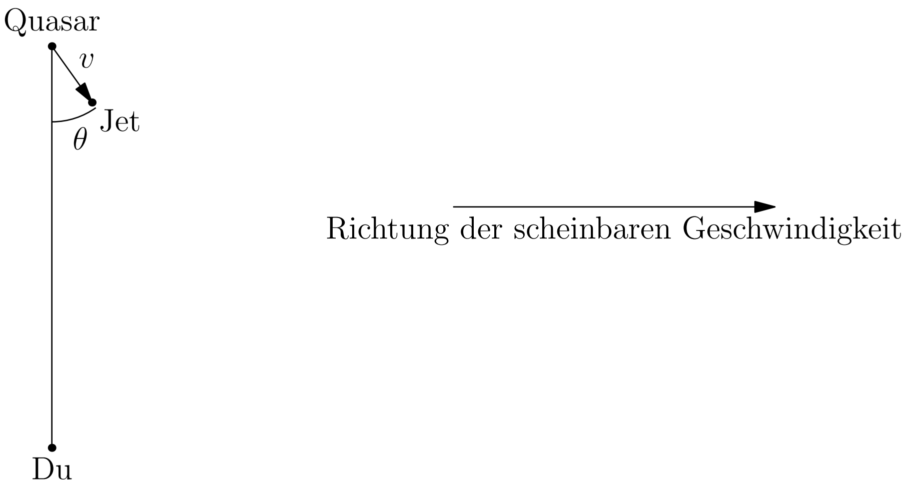
9 Aufgaben

1. Zeige die Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = E_0^2 + (cp)^2$ mithilfe von $E = \gamma m_0 c^2$, $E_0 = m_0 c^2$ und $p = \gamma m_0 v$!

2. Leite aus $F = \gamma^3 m_0 a$ für $\vec{F} \parallel \vec{v}$ die Formel $E_{kin} = (\gamma - 1) m_0 c^2$ her!

3. (eigentlich keine Relativitätstheorie-Aufgabe)

   a) Ein sehr weit entfernter (relativ zu dir ruhender) Quasar stößt einen Jet mit der Geschwindigkeit v aus. Der Jet bewegt sich schräg auf dich zu. Der Winkel zwischen der Verbindungslinie zwischen dir und dem Quasar und dem Jet beträgt θ. Wie schnell scheint sich der Jet (senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen dir und dem Quasar) zu bewegen (du beobachtest das ganze mit dem Teleskop)?

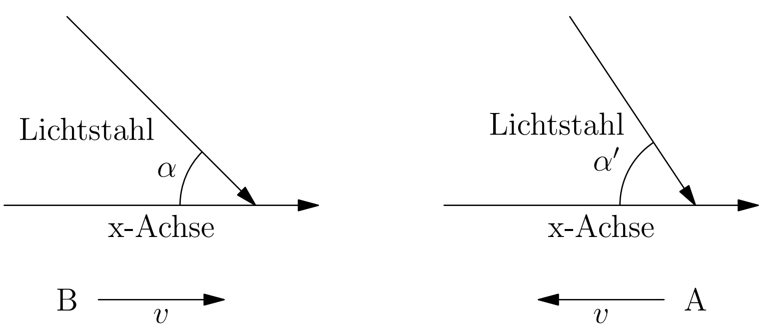


$\frac{v \sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$

   b) Wie groß muss $\frac{v}{c}$ mindestens sein, damit es ein θ gibt, sodass sich der Jet mit Überlichtgeschwindigkeit zu bewegen scheint? $\frac{v}{c} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Ipho 2010 3. Runde (leicht abgewandelt): Es treffe ein Lichtstrahl auf ein Raumschiff B, das sich relativ zu A mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt. A beobachtet dabei einen Winkel von α zwischen dem Lichtstrahl und der x-Achse ($\alpha < 90°$ bedeutet, dass der Lichtstrahl aus negativer x-Richtung kommt). B beobachtet dagegen einen Winkel von α'. Berechne α' in Abhängigkeit von α, v und c.

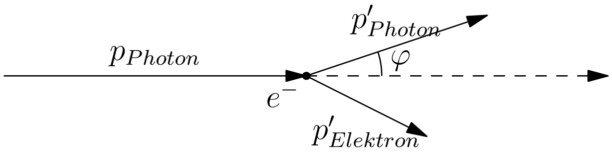
   Von A aus gesehen *Von B aus gesehen*



   Tipp: Berechne, wie schnell sich der Lichtstrahl von beiden Beobachtern aus gesehen in x-Richtung bewegt!

   $\alpha' = \arccos\left(\frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}\right)$

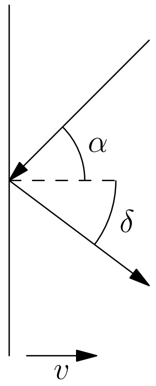
5. Compton-Streuung: Ein Photon treffe auf ein ruhendes Elektron und werde von diesem um einen Winkel φ gestreut. Berechne, um wie viel sich die Wellenlänge des Photons erhöht!



   Tipp: Wende Energie- und Impulserhaltung bei dem Stoß an (und benutze für letztere den Kosinussatz), dann benutze die Beziehung $E_p = cp_p = \frac{c\lambda}{h}$ für die Photonen. Wende anschließend die Energie-Impuls-Beziehung für das Elektron an.

   $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi)$

6. Ipho 2007 3. Runde: A beobachtet, wie ein von rechts oben kommender Lichtstahl auf einen senkrechten Spiegel trifft, der sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt. Der Winkel zwischen dem einfallenden Lichtstrahl und der Horizontalen ist α. Berechne den Winkel δ zwischen dem reflektierten Strahl und der Horizontalen.



$\delta = \arccos \frac{(1+\beta^2)\cos\alpha + 2\beta}{1+\beta^2+2\beta\cos\alpha}$

7. Dopplereffekt: Eine Lichtquelle, die Licht mit einer Frequenz von f (in ihrem Bezugssystem gemessen) abstrahlt, bewegt sich auf dich zu. Welche Frequenz f' misst du?

$f' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

8. Sei $s = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$ (wobei Δt, Δx, Δy, Δz den zeitlichen und örtlichen Abstand zweier Eregnisse darstellen). Zeige, dass s nur von den Ereignissen und nicht vom Bezugssystem abhängt.

9. a) (schwierig) Der Hans befindet sich in einem Raumschiff, das so (in x-Richtung) beschleunigt, dass er ständig sein normales Erdgewicht spürt (d.h. er misst die Raumschiffbeschleunigung g). Berechne seine Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit, gemessen von der Erde (das Raumschiff starte zur Zeit 0 bei $x = 0$)!

   Tipp: Betrachte ein Inertialsystem, das sich zu einer Zeit t mit dem Raumschiff mitbewegt! In diesem kannst du die normalen Gesetze der Mechanik anwenden, solange das Raumschiff in diesem langsam ist. Dann kannst du die errechnete Beschleunigung in diesem System in das Erdsystem transformieren.

   $v = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}$

   b) (schwierig) Berechne seinen Ort in Abhängigkeit von der Zeit!

   $x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right)$

   c) (schwieriger) Hans fliegt von der Erde weg und kommt danach wieder zurück. Dazu wird er zuerst eine Zeit T lang von der Erde weg beschleunigt, dann $2T$ zur Erde hin beschleunigt und schließlich wieder T von der Erde weg beschleunigt, sodass er immer sein normales Erdgewicht spürt und am Schluss (nach $4T$) zum Stillstand kommt. Wie lange musste Sepp inzwischen warten?

   Hinweis: $\int\limits_0^T \frac{1}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}\mathrm{d}t = \frac{c}{g}\operatorname{arsinh}\frac{gT}{c}$

   $4 \cdot \frac{c}{g}\sinh\frac{gT}{c}$