Aufgaben zu Rotationsbewegungen mit Lösung

Zentripetalkraft

1. Raumstation

Eine torusförmige Raumstation (Radius $r = 100\,\mathrm{m}$) rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse, um ihren Bewohnern die Erdbeschleunigung $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ vorzutäuschen. Wie groß muss ω sein? Wie lange dauert ein Umlauf?

Lösung:

$$g = \omega^2 \cdot r$$

$$\omega = \sqrt{g/r} = 0.31\,\mathrm{s}^{-1} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 20\,\mathrm{s}$$

2. Eskimo

Ein Eskimojunge sitzt auf dem höchsten Punkt seines halbkugelförmigen Iglus (Radius r). Dann rutscht er reibungsfrei herunter. In welcher Höhe über dem Erdboden verliert der Körper des Jungen den Kontakt mit der Unterlage?

Lösung: Energieerhaltung:

$$m\,g\,(r-h) = E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m\,v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = g\,(r-h)$$

Beim Abheben ist die Gewichtskraft in radialer Richtung gleich der Fliehkraft:

$$m\,g\,\frac{h}{r} = m\,g\,\sin(\alpha) = F_{g,\mathrm{radial}} = F_z = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\frac{2g\,(r-h)}{r}$$

$$\Rightarrow h = 2(r-h)$$

$$h = \frac{2}{3} r$$

3. Motorradartist

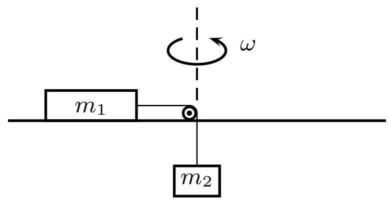
Einem Motarradfahrer gelingt es, in einem zylinderförmigen Raum mit $r = 5\,\mathrm{m}$ an den vertikalen Wänden im Kreis zu fahren. Dank seiner Gummireifen liegt der Haftreibungskoeffizient bei $\mu = 1.5$. Wie schnell muss er mindestens fahren, um nicht herunterzufallen?

Lösung: Die Gewichtskraft parallel zur Wand darf höchstens μ mal der Normalkraft (Fliehkraft) sein:

$$m\,g \le \mu\,m\,\frac{v^2}{r}$$

$$v \ge \sqrt{\frac{g \cdot r}{\mu}} = 5,7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

4. Rotierende Scheibe mit Auflage



Ein dünner Stab mit Länge d und Masse m_1 liegt in radialer Richtung auf einem ebenen horizontalen Teller, der sich mit ω um seine vertikale Achse dreht. An dem Stab ist ein masseloser Faden befestigt, an dem ein Gewicht der Masse m_2 hängt. Zwischen Stab und Tisch herrscht der Reibungsfaktor μ.
In welchen Entfernungen von der Drehachse darf der Stab liegen, damit er sich nicht bewegt?

Lösung: Da Die Fliehkraft linear vom Drehradius abhängt, wirkt sie auf den Körper m_1 so als wäre seine Masse im Schwerpunkt vereint. Seine Fliehkraft beträgt daher:

$$F_\mathrm{z} = m_1\,\omega^2\,r$$

Damit sich nichts bewegt, muss gelten:

$$|\Delta F| = |F_\mathrm{g} - F_\mathrm{z}| < F_\mathrm{r}$$
$$|m_2\,g - m_1\,\omega^2\,r| < m_1\,\mu\,g$$

Für den Mittelpunktsabstand r des Stabs vom Drehzentrum bedeutet das:

$$|\frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\omega^2} - r| < \frac{g}{\omega^2}\mu$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{g}{\omega^2}\left(\frac{m_2}{m_1} - \mu\right) < r < \frac{g}{\omega^2}\left(\frac{m_2}{m_1} + \mu\right)$$

5. Dichte eines Planeten

Kürzlich wurde in einem entfernten Sternsystem ein neuer, sehr dichter und kugelförmiger Planet ohne Atmosphäre entdeckt, der in 60 Minuten um seine Achse rotiert. Schätzen Sie die minimale Dichte ρ dieses Planeten ab!
Tipp: Wenn die Fliehkraft am Äquator größer als die Schwerkraft wird, zerfällt der Planet. Schwerebeschleunigung:

$$a_g = G\cdot m/r^2 = 6,673\cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}\cdot\left(\rho\cdot\tfrac{4}{3}\pi\,r^3\right)/r^2$$

Lösung:

$$F_g > F_z$$
$$g\cdot\left(\rho\cdot\tfrac{4}{3}\pi\,r^3\right)/r^2 = \tfrac{4}{3}\pi\cdot g\cdot\rho\cdot r > \omega^2\cdot r = \left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 r$$
$$\rho > \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{\frac{4}{3}\pi\cdot g} = \frac{3\pi}{g\,T^2} = 11\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2}$$

Coriolis-Kraft

6. Fluss

Ein 1000 m breiter Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in einer geographischen Breite von 55° (Nord) von Süd nach Nord. Wie groß ist der Pegelunterschied zwischen dem westlichen und östlichen Ufer?
Hinweis: Die Flussoberfläche stellt sich so ein, dass sie senkrecht zur wirkenden Gesamtkraft steht.

Lösung: Der Flussquerschnitt und das Kräftedreick bilden ähnliche Dreiecke (b=Flussbreite, h=Pegelunterschied):

$$\frac{h}{b} = \frac{F_\mathrm{c}}{F_\mathrm{g}} = \frac{a_\mathrm{c}}{a_\mathrm{g}}$$

Nun brauchen wir die Radialgeschwindigkeit des Flusses senkrecht zur Drehachse ($\vec{\omega}$):

$$a_\mathrm{c} = |2\,\vec{v}\times\vec{\omega}| = 2\,(v\cdot\sin(55^\circ))\,\omega$$

Hierbei ist die Drehgeschwindigkeit der Erde $\omega = 2\pi/1\,\mathrm{d}$ mit einem Sterntag $1\,\mathrm{d} = 23,93\,\mathrm{h}$:

$$h = b\cdot\frac{a_\mathrm{c}}{a_\mathrm{g}} = b\cdot\frac{2\,(v\cdot\sin(55^\circ))\,\omega}{g} = 2,4\,\mathrm{cm}$$

Dabei ist der Wasserstand im Osten höher.

7. Turm (mit Integralrechnung)

Eine Kugel falle von einem Turm der Höhe h, der am Äquator steht. Wie weit neben dem Turm trifft die Kugel am Boden auf? In welche Himmelsrichtung weicht der Auftreffpunkt vom Lot ab? Berechnen Sie die Abweichung für $h = 400\,\mathrm{m}$. Luftwiderstand ist wie immer zu vernachlässigen.

Lösung: Für die Fallzeit t_f gilt:

$$h = \frac{1}{2} g\, t_\mathrm{f}^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Die vertikalgeschwindigkeit nimmt gleichförmig zu:

$$v_z(t) = g \cdot t$$

Coriolisbeschleunigung in x-Richtung ist zeitabhängig:

$$a_\mathrm{c}(t) = 2g\, t\, \omega$$

$$v_x = \int_0^{t_\mathrm{f}} a_\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_\mathrm{f}} 2g\, t\, \omega\,\mathrm{d}t = g \cdot t_\mathrm{f}^2 \cdot \omega$$

Die Ortsabweichung ergibt sich nun:

$$x(t_\mathrm{f}) = \int_0^{t_\mathrm{f}} v_x\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_\mathrm{f}} g \cdot t_\mathrm{f}^2 \cdot \omega\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} g\, \omega\, t_\mathrm{f}^3 = \frac{\sqrt{8}}{3}\, \omega \sqrt{\frac{h^3}{g}}$$

Mit der Drehgeschwindigkeit der Erde $\omega = 2\pi/1\,\mathrm{d}$ und einem Sterntag $1\,\mathrm{d}$:

$$x(h = 400\,\mathrm{m}) = 17{,}6\,\mathrm{cm}$$

Abweichung in Richtung Osten, da die Kugel eine höhere Geschwindigkeit in Drehrichtung mitbringt.

Rotationsenergie, Drehimpuls

8. Pulsar

Ein Stern mit Radius $r_1 = 10^6\,\mathrm{km}$ und einer Rotationsdauer von 1 Monat wandelt sich am Ende seiner Lebenszeit in einen gleichschweren Pulsar mit nur noch $r_2 = 20\,\mathrm{km}$ Radius um. Berechnen Sie dessen Umlaufzeit unter Annahme der Drehimpulserhaltung!

Lösung: Der Drehimpuls muss erhalten sein:

$$J \cdot \omega = \text{const.} \qquad \text{und} \qquad J = \text{const.} \cdot r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r^2 \cdot \omega = \text{const.}$$

$$r_1^2 \cdot \omega_1 = r_2^2 \cdot \omega_2$$

$$\frac{r_1^2}{T_1} = \frac{r_2^2}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1\,\text{Monat} \cdot \left(\frac{20\,\mathrm{km}}{10^6\,\mathrm{km}}\right)^2 = 1{,}05\,\mathrm{ms}$$

9. Rotierende Zylinderscheiben

Zwei homogene Zylinderscheiben (m, r_1, ω_1 und m, r_2, ω_2) rotieren parallel zueinander um die selbe Achse. Nun werden die beiden Scheiben entlang der Achse aneinander geschoben, bis sie sich berühren und durch Reibung ihre Winkelgeschwindigkeiten komplett angleichen.
a) Wie groß ist dann die neue Winkelgeschwindigkeit ω?
b) Welcher Bruchteil der Anfangsenergie geht verloren?
Tipp: Was ist hier eine Erhaltungsgröße?

Lösung a: Der Drehimpuls bleibt erhalten, die Rotationsenergie wegen der Reibung nicht.

$$\omega = \frac{L}{J} = \frac{L_1 + L_2}{J_1 + J_2} = \frac{J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2}{J_1 + J_2} = \frac{r_1^2\,\omega_1 + r_2^2\,\omega_2}{r_1^2 + r_2^2}$$

Lösung b:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2}{\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2} = 1 - \frac{(r_1^2 + r_2^2)\omega^2}{r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2} = 1 - \frac{(r_1^2 + r_2^2)\,(r_1^2\,\omega_1 + r_2^2\,\omega_2)^2}{(r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)^2}$$

$$= 1 - \frac{(r_1^2\,\omega_1 + r_2^2\,\omega_2)^2}{(r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)} = \frac{r_1^2\, r_2^2 \cdot (\omega_1 - \omega_2)^2}{(r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)}$$

Trägheitsmoment

10. Trägheitsmomente von Grundkörpern

Berechnen Sie das Trägheitsmoment folgender Grundkörper mit Masse m:

- Dünner Kreisring mit Radius R *(Lösung: mR^2)*
- Kreisscheibe mit Radius R.
  Tipp: Hier sollte man als Koordinaten r als Abstand vom Mittelpunkt und φ als Winkel wählen. Für ein Flächenelement gilt dann: $\mathrm{d}A = r \cdot \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r$ *(Lösung: $\frac{1}{2}mR^2$)*
- Quader mit Kantenlänge a, b, c. (Drehachse durch die Kante bei c). *(Lösung: $\frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$)*
- Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2. (Drehung um Symmetrieachse)
  (Lösung: $\frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$)
- Kegel mit Höhe H und Radius R. (schwierig) *(Lösung: $\frac{3}{10}ma^2$)*
- Gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a bei Drehung um eine Ecke. (schwierig)
  Tipp: Höhe im gleichseitigen Dreieck $= \sqrt{3}/2$ *(Lösung: $\frac{5}{12}ma^2$)*
- Dünnwandige Hohlkugel mit Radius R bei Drehung um den Mittelpunkt. (schwierig) *(Lösung: $\frac{2}{3}mR^2$)*

11. Schiefe Ebene

Ein runder Körper mit Radius r und Trägheitsmoment J um seine Symmetrieachse wird auf einer schiefen Ebene losgelassen und beginnt rutschfrei zu rollen. Wie schnell ist seine Geschwindigkeit v nachdem er die Höhendifferenz h überwunden hat? Setzen Sie danach verschiedene Körper ein (Scheibe, Hohlzylinder, ...)

Lösung: Energieansatz:

$$m\,g\,h = E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 = \frac{v^2}{2} + \left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

$$v(h) = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \frac{J}{m\,r^2}}}$$

Je größer also der Zahlenfaktor im Trägheitsmoment, desto langsamer rollt der Körper.

Drehschwingungen

12. Schwingendes Quadrat

Ein Quadrat mit Seitenlänge a und Masse m wird an einer Ecke drehbar aufgehängt und entlang seiner Ebene ein wenig aus der Ruhelage ausgelenkt. Wie groß ist dann die Periodendauer seiner Schwingung?
Die Schwerebeschleunigung beträgt g.

Lösung: Das Trägheitsmoment eines Quadrates beträgt:

$$J = \frac{2}{3}\,m\,a^2$$

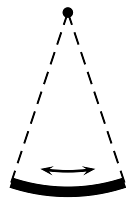
Der Schwerpunktsabstand von der Drehachse ist $a/\sqrt{2}$, somit ist die Winkelrichtgröße k für kleine Auslenkungen:

$$k = m\,g\,a/\sqrt{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{3}\,\frac{a}{g}}$$

13. Kreissegment als Pendel

Ein Kreissegment (Abschnitt eines Rings) mit Masse m, Radius R und Winkelausdehnung $\varphi = 60^\circ$ wird an zwei leichten Fäden aufgehängt. Wie groß ist seine Schwingungsdauer bei Schwingung entlang der Kreislinie?



Tipp: Der Schwerpunktsabstand s vom Aufhängepunkt ist

$$s = \frac{1}{\varphi} \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} R \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = R \cdot \frac{2}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Lösung: Das Trägheitsmoment eines Kreissegments (Abstand von der Drehachse ist konstant) beträgt:

$$J = m\, R^2$$

Der Schwerpunktsabstand von der Drehachse ist s, somit ist die Winkelrichtgröße k für kleine Auslenkungen:

$$k = m\, g\, s$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m\, R^2}{m\, g\, s}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^2}{g\, R \cdot \frac{2}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{1}{\frac{2}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

14. Wippe

Ein halbkreisförmiges Prisma mit Radius r wird mit der runden Seite auf den Tisch gelegt und ein wenig angestoßen. Wie groß ist die Schwingungsdauer T? (schwierig)
Tipp: Der Schwerpunktsabstand vom Kreismittelpunkt ist $s = \frac{4}{3\pi} r$. Skizze aufmalen!

Lösung: Das Trägheitsmoment um den Kreismittelpunkt ist bekannt als $\frac{1}{2} m\, r^2$. Nach Steiner kann man auf das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt schließen und von dort auf das Trägheitsmoment um den Auflagepunkt, denn um diesen Punkt dreht sich das Prisma zumindest momentweise:

$$J = J_\mathrm{S} + m\,(r - s)^2 = (\frac{1}{2} m r^2 - m\, s^2) + m\,(r - s)^2 = m \cdot (\frac{3}{2}\, r^2 - 2\, r\, s)$$

Die Horizontalentfernung des Schwerpunktes zum Auflagepunkt x beträgt $s \cdot \sin(\varphi)$, somit:

$$M(\varphi) = \sin(\varphi)\, m\, g\, s$$

Winkelrichtgröße k:

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{M=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \sin(\varphi)\, m\, g\, s\right|_{M=0} = \left.\cos(\varphi)\, m\, g\, s\right|_{M=0} = m\, g\, s$$

Das bedeutet für die Schwingungsperiode:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot (\frac{3}{2}\, r^2 - 2\, r\, s)}{m\, g\, s}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2}\, \frac{r}{s} - 2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{9\pi}{8} - 2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$