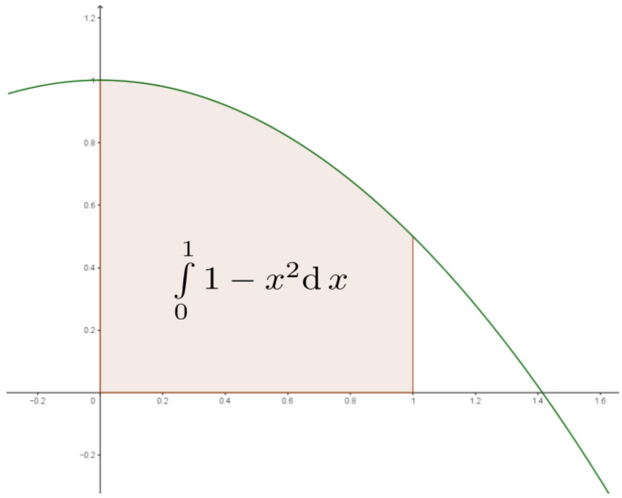
Einführung ins Integrieren

Definition

Geometrisch: Das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Fläche unter der Kurve f(x) von x=a bis x=b.



Analysis: Sei f(x) eine stückweise stetige Funktion. Eine Funktion F(x) mit $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ heißt unbestimmtes Integral oder Stammfunktion von f(x).

Sei f(x) eine integrierbare Funktion und F(x) eine Stammfunktion von f(x). Dann gilt $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{F(b)\text{-}F(a)}$.

Grundintegrale

$$\begin{aligned}
\int a\,dx &= ax \\
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \\
\int e^x\,dx &= e^x \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x|, \quad x \neq 0 \\
\int \cos x\,dx &= \sin x \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x, \quad x \neq \tfrac{(2k+1)\pi}{2} \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x, \quad x \neq k\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}, \quad |x| < 1 \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \begin{cases} \arctan x \\ -\operatorname{arccot} x \end{cases} \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x \\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x \\
\int \frac{dx}{\cosh^2 x} &= \tanh x \\
\int \frac{dx}{\sinh^2 x} &= -\coth x, \quad x \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \operatorname{arsinh} x \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \begin{cases} \operatorname{arcosh} x, & x > 1 \\ -\operatorname{arcosh}(-x), & x < -1 \end{cases} \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \begin{cases} \operatorname{artanh} x, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x, & |x| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{F(b)\text{-}F(a)}$$

Intervalladditivität: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

<table>
<tr><th>Differentialrechnung</th><th>Integralrechnung</th></tr>
<tr><td>Konstantenregel
$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot (f(x))'$

Summenregel
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$</td><td>Linearität
$\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$
Beispiel:
$\int 2 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 2\ln\lvert x\rvert$
$\int 2x^2 + x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$</td></tr>
<tr><td>Kettenregel
$\frac{\mathrm{d}F(u(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(u(x))}{\mathrm{d}u(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$</td><td>Substituieren
$\int f(u)\mathrm{d}x = \int f(u) \cdot \frac{1}{u'}\,\mathrm{d}u$

Beispiel:
$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$
$u = 2x+1 \implies u' = (2x+1)' = 2$
$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u'}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$
$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \ln u + C$</td></tr>
<tr><td>Produktregel
$(uv)' = u'v + uv'$</td><td>Partielles Integrieren
$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x$

Beispiel:
$\int \sin x \cdot x\,\mathrm{d}x$
$u' = \sin x \implies u = -\cos x$
$v = x \implies v' = 1$
$\int \sin x \cdot x\,\mathrm{d}x = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1\,\mathrm{d}x$
$\int \sin x \cdot x\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x \cdot x$</td></tr>
</table>

Aufgaben

1. Bestimme die unbestimmten Integrale
   a. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
   b. $\int \frac{2+a}{x^2} \,\mathrm{d}x$
   c. $\int \frac{x^3-1}{x} \,\mathrm{d}x$
   d. $\int ax^2 + bx + c \,\mathrm{d}x$
   e. $\int \sinh x + \cosh x \,\mathrm{d}x$
2. Bestimme das bestimmte Integral
   a. $\int_1^4 x^2 \; \mathrm{dx}$
   b. $\int_0^3 \frac{x^2+x+1}{x} \; \mathrm{dx}$
   c. $\int_0^\pi \sin x \; \mathrm{dx}$
   d. $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; \mathrm{dx}$
3. Bestimme die unbestimmten Integrale mit Hilfe von Substitution
   a. $\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$
   b. $\int \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x$
   c. $\int \sin(3-7x) \,\mathrm{d}x$
   d. $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \,\mathrm{d}x$
   e. $\int \sin^3 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$
4. Bestimme die unbestimmten Integrale durch partielle Integration
   a. $\int \sin x \cdot x \,\mathrm{d}x$
   b. $\int \ln x \cdot x^{-\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x$
   c. $\int e^x \cdot x \,\mathrm{d}x$

Lösungen

1. a. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$
   b. $-\frac{2+a}{x}+C$
   b. $\frac{1}{3}x^3-\ln|x|+C$
   c. $\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C$
   d. $\sinh x+\cosh x$
2. a. 21
   b. ≈7,10
   c. 2
3. a. $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$
   b. $\ln|x+2|+C$
   c. $\frac{1}{7}\cos(3-7x)+C$
   d. $\sqrt{2+x^2}+C$
   e. $\frac{\sin^4 x}{4}+C$
4. a. $\sin x-\cos x\cdot x+C$
   b. $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C$
   c. $e^x(x-1)+C$