Himmelsmechanik

Tobias Fritz
fritz@mpim-bonn.mpg.de

16. November 2009

1 Einleitung

Dieses Skript zur Himmelsmechanik ist entstanden aus einem Vortrag an der TU Kaiserslautern im Oktober 2009, welcher im Rahmen eines Seminars von Orpheus e.V. zur Vorbereitung auf das deutsche Auswahlverfahren zur Internationalen Physikolympiade vor einer Gruppe von interessierten Schülern gehalten wurde. Es sollte mit Kenntnissen von Newtonscher Mechanik sowie etwas Analysis verständlich sein; es ist aber sicher hilfreich, wenn dem Leser die Keplerschen Gesetze bereits ungefähr bekannt sind.

Die Himmelsmechanik beschäftigt sich mit den Gesetzen der Bewegung astronomischer Objekte. Dazu gehören unter anderem die Körper des Sonnensystems, also die Sonne, die Planeten mit ihren Monden, sowie Asteroiden – siehe Abbildung 1. Ebenso aber auch künstliche Objekte wie Satelliten. Auf größeren Längenskalen jenseits des Sonnensystems hat man es mit Galaxien und Galaxienhaufen zu tun. Auf allen diesen Größenskalen gibt es noch ungelöste Probleme, die Gegenstand aktueller physikalischer Forschung sind, zum Beispiel die Fly-by-Anomalie, die Pioneer-Anomalie, dunkle Materie oder dunkle Energie. (Mehr zu allen diesen steht zum Beispiel auf Wikipedia.)

Hier wollen wir die wichtigsten Grundgesetze der Himmelsmechanik verstehen, so wie sie Newton und Kepler formuliert haben. Diese finden immer dann Anwendung, wenn es ein **Zentralgestirn** gibt, also ein Objekt mit sehr großer Masse, um das sich alle anderen Objekte bewegen. So zum Beispiel die Sonne im Sonnensystem, oder die Erde im Vergleich zum Mond. Außerdem dürfen die auftretenden Geschwindigkeiten nicht zu groß werden, denn sonst muss man mit der allgemeinen Relativitätstheorie rechnen, was sowohl von der Theorie als auch vom Rechenaufwand her wesentlich schwieriger ist.

2 Newtons Gravitationsgesetz

Newtons Gravitationsgesetz besagt, dass von einem Körper der Masse M auf einen Körper der Masse m die folgende Gravitationskraft wirkt:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

Die Richtung dieser Kraft zeigt in die Richtung des ersten Körpers. Dabei ist r der räumliche Abstand zwischen den beiden Körpern und G ist die sogenannten **Newtonsche Gravitations-**

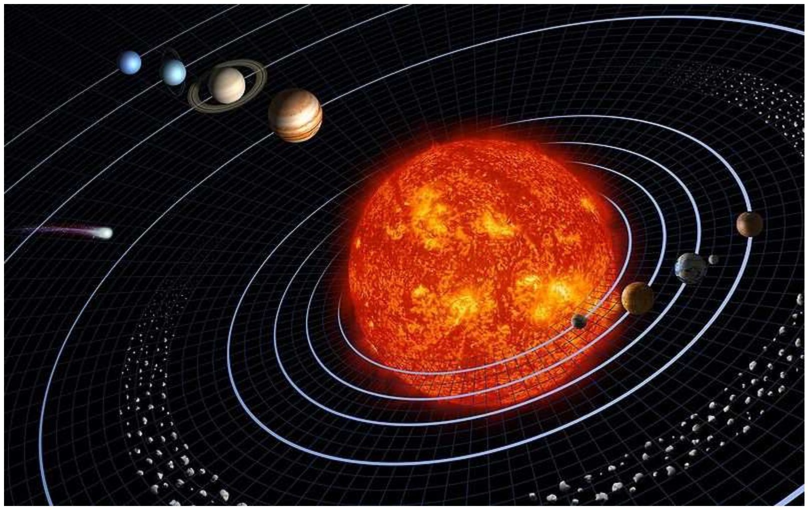


Abbildung 1: Das Sonnensytem.

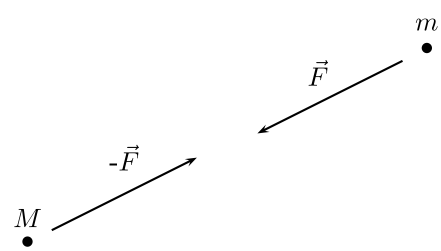


Abbildung 2: Die Gravitationskraft $|\vec{F}| = G\frac{Mm}{r^2}$.

konstante. Präzise Messungen haben ergeben, dass diese den unabänderlichen Wert

$$G \approx 6,6743 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \tag{2}$$

besitzt. Außerdem wirkt nach dem dritten Newtonschen Gesetz dieselbe Kraft vom Körper der Masse m auf den Körper der Masse M, in die entgegengesetzte Richtung; zur Veranschaulichung siehe Abbildung 2. Wenn man sich die Masse eines Körpers als analog zu elektrischer Ladung vorstellt, dann stellt man fest, dass die Newtonsche Gravitationskraft völlig analog zur elektrostatischen Coulombkraft ist.

Durch die Gravitationskraft des Körpers der Masse M liefert das für den Körper den Masse m also eine **Gravitationsbeschleunigung**,

$$a = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}. \tag{3}$$

Im Unterschied zur Coulombbeschleunigung hängt diese also nicht von m ab. Dies erklärt, warum alle Körper in einem Gravitationsfeld gleich schnell fallen.

Bemerkung 1. Mit einer Umformulierung des Gravitationsgesetzes durch den Gaußschen Integralsatz kann man unter Ausnutzung von Symmetrien zeigen, dass die Gravitationskraft nicht davon abhängt, ob die beteiligten Körper nun punktförmig sind oder eine andere rotationssymmetrische Form haben. Falls man zum Beispiel die Erde als rotationssymmetrische Kugel annimmt, bekommt man für die Gravitationsbeschleunigung auf der Erdoberfläche den Wert

$$a = G\frac{M}{r^2} \approx 6,6743 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot \frac{5,9736 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6371,0 \cdot\ \mathrm{km})^2} \approx 9,82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{4}$$

was mit großer Genauigkeit der tatsächlich gemessen Erdbeschleunigung entspricht.

Alternativ zu (1) kann man auch nur mit der **potentiellen Gravitationsenergie** rechnen:

$$V = -G\frac{Mm}{r} \tag{5}$$

Die Rechnung mit der potentiellen Energie liefert die gleichen Ergebnisse wie die Rechnung mit der Kraft. Somit sind die beiden Beschreibungen äquivalent.

Bemerkung 2. Eine der beiden Gleichungen (1) oder (5) ist, genauso wie die Newtonschen Axiome, als **Postulat** anzusehen: es handelt sich um eine Annahme der Theorie, die nicht aus anderen Annahmen hergeleitet werden kann. Ob diese Annahme zu einer korrekten Beschreibung des physikalischen Sachverhalts führt, wird erst entschieden durch den Vergleich der Vorhersage der Theorie mit den Ergebnissen von Beobachtungen. In unserem Fall also zum Beispiel der Beobachtung der Planeten und Monde des Sonnensystems.

3 Das Zweikörperproblem

Wie oben bereits beschrieben, gehen wir davon aus, dass es ein Zentralgestirn sehr großer Masse gibt. Dies hat zwei Dinge zur Folge, welche eine einfache Beschreibung des Systems ermöglichen:

- Das Zentralgestirn selbst wird durch die auftretenden Kräfte sehr wenig beschleunigt. Sein Bezugssystem ist also ein Inertialsystem, in dem sich das Zentralgestirn in Ruhe befindet. Die Position jedes anderen Körpers ist dann festgelegt durch seinen Abstand zum Zentralgestirn sowie zwei Winkel.

- Die Anziehungskraft aller anderen Körper untereinander ist vernachlässigbar im Vergleich zur Anziehungskraft zwischen einem Körper und dem Zentralgestirn. Wenn man die Bewegung eines Körpers betrachtet, kann man also die Existenz aller anderen Körper außer dem Zentralgestirn vergessen. In diesem Sinne handelt es sich um ein **Zweikörperproblem**. Die Position des Zentralgestirn ist also immer fest. Deshalb ist es günstig, die Position des Planeten durch den Verbindungsvektor $\vec{r}$ zwischen Planet und Zentralgestirn anzugeben.

4 Die Bewegungsgleichungen

Wir betrachten jetzt also einen einzelnen Körper der Masse m, der sich um das Zentralgestirn der Masse M bewegt. Wir nennen ihn der Einfachheit halber "Planet", es kann sich aber genausogut um einen Satelliten mit der Erde als Zentralgestirn handeln. Da nun alle relevanten Informationen

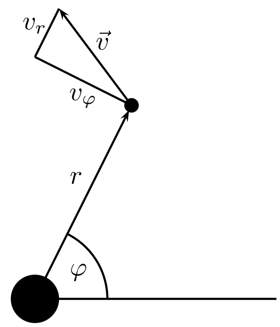


Abbildung 3: Polarkoordinaten für das Zweikörperproblem. Das Dreieck zeigt die Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ in die Radialkomponente v_r und die Tangentialkomponente v_φ.

gegeben sind, insbesondere die wirkende Kraft (1), könnte man die Bewegungsgleichungen des Planeten aufstellen und versuchen, diese zu lösen. Damit wäre die Bahn des Planeten vollständig bekannt.

Es gibt jedoch auch eine Möglichkeit, die Bahn des Planeten zu bestimmen, ohne die Bewegungsgleichungen aufstellen zu müssen. Dies funktioniert übrigens immer dann, wenn das System eine ausreichende großse Zahl an Symmetrien hat. Zunächst stellt man fest, dass das System **Erhaltungsgrößen** besitzt:

- Energie: die Summe aus kinetischer Energie $\frac{1}{2}mv^2$ und potentieller Energie (5) ist zeitlich konstant.
- Drehimpuls: der Drehimpulsvektor $\vec{r} \times \vec{p} = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$ ist in Betrag und Richtung zeitlich konstant.

Die Drehimpulserhaltung folgt dabei daraus, dass auf den Planeten kein Drehmoment wirkt: die Gravitationskraft ist immer parallel zum $\vec{r}$-Vektor.

Wir werden sehen, dass durch diese Erhaltungsgrößen, zusammen mit den Anfangsbedingungen, die Bahn des Planeten bereits eindeutig bestimmt ist. Somit besteht keine Notwendigkeit, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, welche schwieriger zu lösen wären – denn in Wirklichkeit handelt es sich bei den Erhaltungsgrößen um einmal integrierte Versionen der Bewegungsgleichungen. Ein System, welches diese Bedingungen erfüllt, wird manchmal auch als **vollständig integrabel** bezeichnet; das Zweikörperproblem ist also vollständig integrabel.

Aus der Drehimpulserhaltung folgt zunächst, dass die durch $\vec{r}$ und $\vec{v}$ definierte Ebene immer die gleiche ist; diese heißt Bahnebene. Insbesondere bedeutet das, dass sich die Bahn des Planeten komplett in dieser Ebene befindet. Damit ist das Problem bereits auf ein effektiv zweidimensionales reduziert.

Somit muss noch die Bewegung innerhalb der Bahnebene beschrieben werden. Zweckmäßigerweise benutzt man dafür Polarkoordinaten (r, φ); diese bestehen aus dem Abstand $r = |\vec{r}|$ vom Zentralgestirn, sowie einem Winkel φ, der den Winkel zwischen der Verbindungslinie Zentralgestirn–Planet sowie einer festen Richtung angibt (siehe Abbildung 3).

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv^2 - GMm\frac{1}{r} = E \tag{6}$$

Drehimpulserhaltung:

$$r \cdot mv_\varphi = L \tag{7}$$

Um nicht dauernd die Planetenmasse m mitführen zu müssen, ist es zweckmäßig, die Bezeichnungen $\mathcal{E} = E/m$ und $\ell = L/m$ zu verwenden; damit kann man m aus allen Gleichungen komplett herauskürzen. Durch Auflösen nach den Geschwindigkeiten bekommt man dann die Gleichungen

$$v = \sqrt{2\left(\mathcal{E} + GM\frac{1}{r}\right)}, \qquad v_\varphi = \frac{\ell}{r} \tag{8}$$

In einem infinitesimalen Zeitintervall dt ändert sich der Abstand zum Zentralkörper um

$$dr = v_r \cdot dt \tag{9}$$

und in tangentialer Richtung bewegt er sich um

$$r\,d\varphi = v_\varphi \cdot dt \tag{10}$$

denn wenn sich der Winkel um einen infinitesimalen Anteil $d\varphi$ geändert hat, dann hat der Planet eine tangentiale Strecke $r\,d\varphi$ zurückgelegt. Also ergibt sich daraus, zusammen mit $v_r = \sqrt{v^2 - v_\varphi^2}$ (Pythagoras),

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{v_\varphi}{r\sqrt{v^2 - v_\varphi^2}} \tag{11}$$

Nach etwas Rechnung erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (8),

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\ell}{r\sqrt{2\mathcal{E}r^2 + 2GMr - \ell^2}} \tag{12}$$

Durch Bilden der Stammfunktion auf der rechten Seite bekommt man somit die Bahnkurve in der Form $\varphi(r)$. Diese Stammfunktion kann elementar berechnet werden und enthält eine inverse trigonometrische Funktion. Aufgrund des Rechenaufwands werden wir hier aber darauf verzichten. Stattdessen werden wir umgekehrt vorgehen und nachrechnen, dass für die aus den Keplerschen Gesetzen hergeleiteten Bahnkurven die Gleichung (12) erfüllt ist. Dafür ist es zweckmäßig, (12) noch ein bischen weiter umzuformen zu

$$\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} + \frac{2GM}{\ell^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \tag{13}$$

Bemerkung 3. Noch eine Bemerkung zum Schluss dieses Abschnittes. Energie $\mathcal{E}$ und Drehimpuls ℓ können an sich beliebige Werte annehmen; die Geschwindigkeitskomponente v_φ und somit auch den Drehimpuls kann man als positiv annehmen, indem man gegebenfalls die Bahnebene "von unten" betrachtet, so dass der Planet in umgekehrter Richtung umläuft. Die Gesamtenergie kann dagegen beliebig positiv oder negativ sein: die kinetische Energie kann beliebig groß werden, und die potentielle Energie beliebig stark negativ. Können aber – gegeben einen beliebigen Wert für $\mathcal{E}$ und einen für ℓ – beide immer **zusammen** auftreten? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir noch einmal Gleichung (8). Der Betrag der Geschwindigkeit muss sicher mindestens so groß sein wie die tangentiale Komponente, also

$$v_\varphi \leq v \tag{14}$$

Einsetzen von (8) liefert die Bedingung

$$\frac{\ell}{r} \leq \sqrt{2\left(\mathcal{E} + GM\frac{1}{r}\right)} \tag{15}$$

welche äquivalent ist zu

$$\ell^2 \leq 2\mathcal{E}r^2 + 2GMr \tag{16}$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\mathcal{E} < 0$. Dann liegt das Minimum der rechten Seite dieser Ungleichung, als Funktion von r, bei $r = -GM/2\mathcal{E}$ und hat den Wert $-G^2M^2/2\mathcal{E}$, so dass auch

$$\ell^2 \leq -\frac{G^2M^2}{2\mathcal{E}} \tag{17}$$

gelten muss. Durch Multipliation dieser Gleichung mit $\mathcal{E}$ kehrt sich die Richtung der Ungleichung um, da $\mathcal{E}$ negativ ist. Also:

$$\boxed{\text{für } \mathcal{E} < 0 \text{ gilt: } \mathcal{E}\ell^2 \geq -\frac{1}{2}G^2M^2} \tag{18}$$

Andererseits ist diese Bedingung an das Wertepaar $(\mathcal{E}, \ell)$ mit $\mathcal{E} < 0$ aber auch hinreichend dafür, dass dieses Wertepaar auftreten kann: denn falls es (18) erfüllt, so kann man einen passenden Wert für r finden, so dass (16) erfüllt ist. Aus (8) ergibt sich dann ein eindeutiger Geschwindigkeitsvektor (v_r, v_φ). Mit diesem r und (v_r, v_φ) als Anfangsbedingungen erhält man eine Bahnkurve mit den gegebenen Werten von Energie und Drehimpuls. Aus der Herleitung von (18) ist erkennbar, dass Gleichheit von linker und rechter Seite genau dann gilt, wenn $v = v_\varphi$ ist **und** $r = -GM/2\mathcal{E}$. Die Bedingung $v = v_\varphi$ ist äquivalent zu $v_r = 0$.

In dem Fall $\mathcal{E} \geq 0$ ist die rechte Seite von (16) dagegen unbeschränkt, und deshalb ist dann jeder Wert von ℓ zulässig; der Abstand r muss nur groß genug gewählt werden, so dass bei gegebenem $(\mathcal{E}, \ell)$ die Ungleichung gilt. Insgesamt ist die erlaubte Region der möglichen Wertepaare $(\mathcal{E}, \ell)$ dargestellt in Abbildung 4.

5 Die Keplerschen Gesetze

Die drei Keplerschen Gesetze geben Auskunft über Geometrie und zeitlichen Verlauf der Planetenbahn. Wir werden sie im folgenden im Detail herleiten und zu verstehen versuchen. Sie lauten:

- 1. Keplersches Gesetz: Die Bahnkurve eines Planeten in der Bahnebene ist ein Kegelschnitt, so dass das Zentralgestirn in einem der beiden Brennpunkte liegt.
- 2. Keplersches Gesetz: Der $\vec{r}$-Vektor des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 3. Keplersches Gesetz: Falls der Kegelschnitt eine Ellipse ist, so erfüllen Umlaufdauer T und große Halbachse a die Gleichung

  $$a^3 \cdot 4\pi^2 = T^2 \cdot GM \tag{19}$$

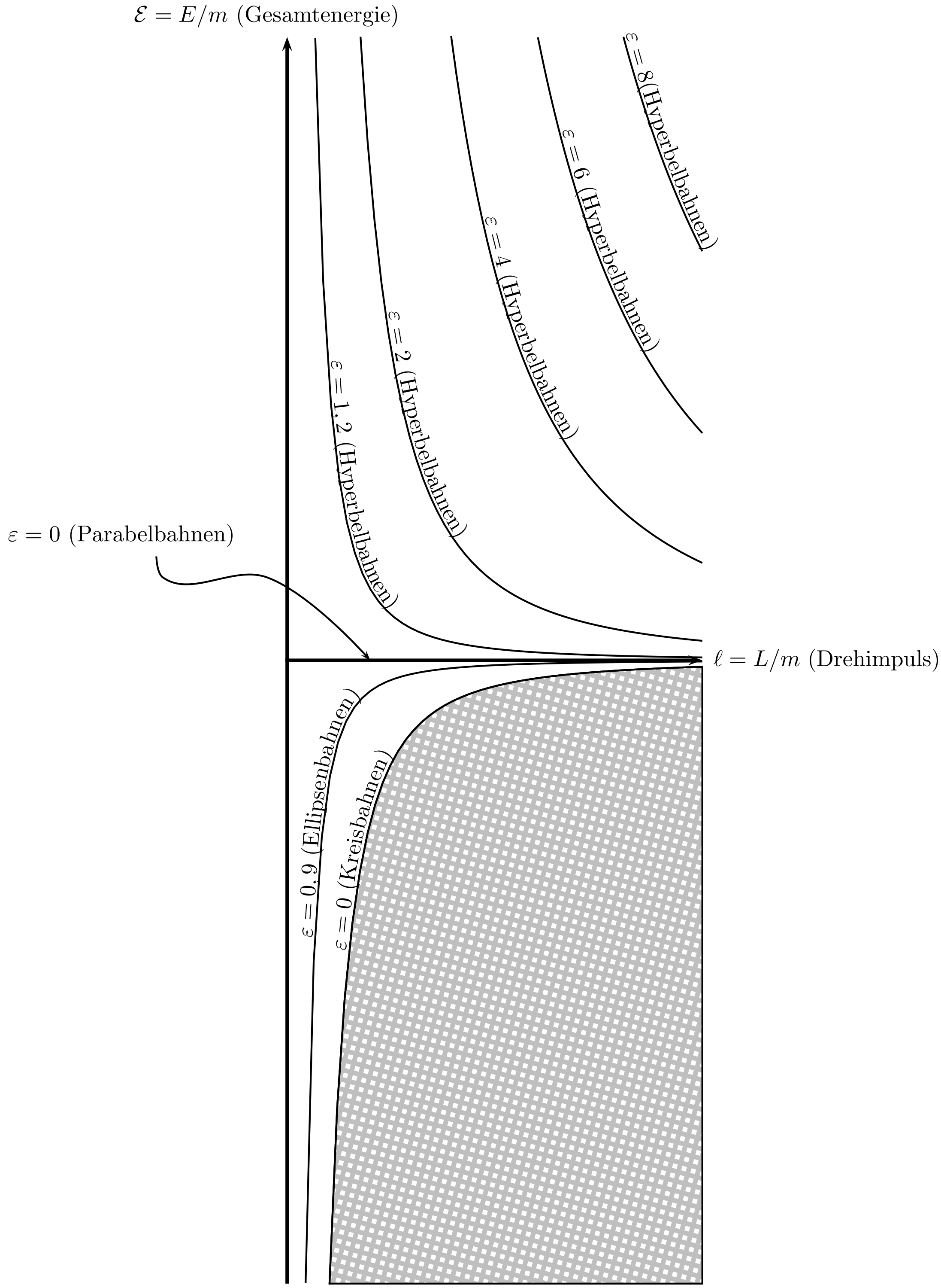


Abbildung 4: Das "Phasendiagramm" des Zweikörperproblems. In Abhängigkeit von Drehimpuls und Gesamtenergie kann die Bahnkurve unterschiedliche Formen annehmen. Die Form wird durch die Exzentrizität ε bestimmt. Es gilt immer $\mathcal{E}\ell^2 \geq -G^2M^2/2$, deshalb können die Punkte im markierten Bereich nicht auftreten.

Aus mathematischen Überlegungen folgt, dass ein Kegelschnitt in Polarkoordinaten (r, φ), mit einem Brennpunkt im Zentrum, die Form

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \tag{20}$$

hat. Dabei sind p und ε Parameter, welche die Form des Kegelschnittes festlegen. Jetzt werden wir nachrechnen, dass bei gegebenem $\mathcal{E}$ und ℓ die Parameter p und ε so gewählt werden können, dass (13) erfüllt ist. Dazu schreiben wir zunächst (20) in der Form

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi \tag{21}$$

und können dann die für (13) relevante Ableitung berechnen,

$$\frac{d(1/r)}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi \tag{22}$$

Jetzt können (21) und (22) in (13) eingesetzt werden,

$$\left(-\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi\right)^2 = \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} + \frac{2GM}{\ell^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi\right) - \left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi\right)^2 \tag{23}$$

Schließlich muss gezeigt werden, dass p und ε so gewählt werden können, dass diese Gleichung für alle Werte von φ gilt. Mit $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ auf der linken Seite und Ausmultiplizieren auf der rechten Seite hat man

$$\frac{\varepsilon^2}{p^2} - \cancel{\frac{\varepsilon^2}{p^2} \cos^2 \varphi} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} + \frac{2GM}{\ell^2 p} - \frac{1}{p^2}\right) + \frac{2\varepsilon}{p}\left(\frac{GM}{\ell^2} - \frac{1}{p}\right) \cos \varphi - \cancel{\frac{\varepsilon^2}{p^2} \cos^2 \varphi} \tag{24}$$

Damit diese Gleichung für alle Werte von φ gelten kann, muss der verbleibende $\cos \varphi$-Term ebenfalls wegfallen, also muss

$$\boxed{p = \frac{\ell^2}{GM}} \tag{25}$$

erfüllt sein. Die verbleibende Gleichung ist dann unabhängig von φ und lautet

$$\varepsilon^2 \cdot \frac{G^2 M^2}{\ell^4} = \frac{2\mathcal{E}}{\ell^2} + \frac{G^2 M^2}{\ell^4} \tag{26}$$

also bekommt man für die Exzentrizität,

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}\ell^2}{G^2 M^2}}} \tag{27}$$

6 Geometrie der Kegelschnitte

Für gegebene Werte von Energie und Drehimpuls ist nun also die Bahnkurve $r(\varphi)$ bekannt. Insbesondere kann man damit bei gegebenen Anfangsbedingungen – also wenn man den Ort und den Geschwindigkeitsvektor des Planeten zu einem bestimmten Zeitpunkt kennt – die Form der Bahnkurve berechnen. Wie sieht aber eine Kurve mit der Gleichung (20) konkret aus?

Zunächst mag erstaunlich erscheinen, dass die Bahnkurve **geschlossen** ist, d.h. dass sich der Planet nach einer vollen Umdrehung um den Winkel $\Delta\varphi = 2\pi$ wieder am vorherigen Ort befindet. Das kommt daher, dass also die Funktion $r(\varphi)$ periodisch ist:

$$r(\varphi + 2\pi) = r(\varphi) \tag{28}$$

Diese Eigenschaft ist in der Tat nur sehr selten erfüllt; man kann zeigen [Arn, 2.8.D], dass die Potentiale der Form $\frac{k}{r}$ (Coulomb-Potential, Gravitationspotential) und kr^2 (Potential des harmonischen Oszillators) die einzigen Potentiale der Form $V(r)$ sind, in dem die Bahnkurven immer geschlossen sind.

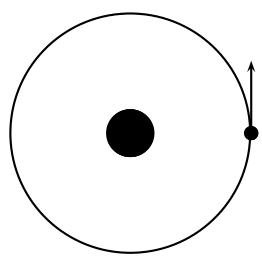
Zur Veranschaulichung und auch für konkrete Rechnungen ist es von Vorteil, die Gleichung der Bahnkurve (20) noch ein wenig umzuformen [Hym]. Wenn man sie als $r + \varepsilon r \cos\varphi = p$ schreibt, ist ersichtlich, dass die Bahnkurve in (r, x)-Koordinaten mit $x = r\cos\varphi$ eine sehr einfache Form annimmt:

$$\boxed{r + \varepsilon x = p} \tag{29}$$

Allerdings bilden die Koordinaten r und x zusammen ein sehr ungewöhnliches Koordinatensystem.

Es sind jetzt verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nach dem Wert von ε hat die Bahnkurve eine andere Form. Es reicht aus, positive Werte von ε zu betrachten; denn für $\varepsilon < 0$ erhält man eine Kurve $r(\varphi) = p/\left(1 + \varepsilon\cos(\phi)\right) = p/\left(1 - |\varepsilon|\cos\varphi\right)$, welche durch eine Drehung des Koordinatensystems $\varphi' := \varphi + \pi$, also $\cos\varphi' = -\cos\varphi$, wieder in der bekannten Form $r(\varphi') = p/\left(1 + \varepsilon'\cos\varphi'\right)$ mit $\varepsilon' = |\varepsilon|$ geschrieben werden kann. Somit sind folgende Fälle zu unterscheiden, welche auch in dem "Phasendiagramm" Abbildung 4 illustriert sind:

- $\underline{\varepsilon = 0}$: Die Bahnkurve hat in diesem Fall die Form $r(\varphi) = p$, d.h. der Abstand zum Zentralgestirn ist konstant. Das bedeutet, dass die Bahnkurve ein Kreis mit Radius p ist:

  (30)

  Die Bedingung $\varepsilon = 0$ tritt nach (27) genau dann ein, falls $2\mathcal{E}\ell^2 = -G^2M^2$ gilt. Die Ungleichung (18) muss also gerade mit Gleichheit erfüllt sein. Dies ist äquivalent zu $v_r = 0$ und $\mathcal{E} = -GM/2r$. Letzteres bedeutet aber gerade

  $$\mathcal{E} = -\frac{GM}{2r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \tag{31}$$

  so dass

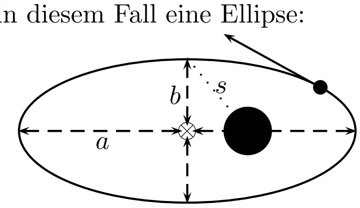
  $$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \tag{32}$$

gelten muss. Dies ist gerade das Kräftegleichgewicht auf der Kreisbahn! Die zugehörige Geschwindigkeit

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}} \tag{33}$$

heißt auch **1. kosmische Geschwindigkeit**. Sie gibt an, wie schnell der Planet an einem bestimmten Punkt mindestens sein muss, damit er sich dem Zentralgestirn nicht wieder annähert.

- $\underline{0 < \varepsilon < 1}$: Die Bahnkurve ist in diesem Fall eine Ellipse:



(34)

Der Mittelpunkt der Ellipse ist als "⊗" markiert. Erstaunlicherweise ist sogar die kleine Halbachse eine Symmetrieachse der Bahnkurve, obwohl das Zentralgestirn nicht auf dieser Achse liegt. (Allerdings ist nur die **Form** der Bahnkurve symmetrisch zu dieser Achse, nicht der **zeitliche Verlauf** der Bahnkurve. Denn die Geschwindigkeit des Planeten ist ja nach (8) um so größer, ja näher er sich am Zentralgestirn befindet.)

Die Längen a und b werden auch als **große Halbachse** und **kleine Halbachse** bezeichnet. Man kann sie folgendermaßen aus p und ε berechnen: zunächst ist aus (20) ersichtlich, dass der größte und der kleinste Abstand zum Zentralgestirn gerade durch $p/(1-\varepsilon)$ und $p/(1+\varepsilon)$ gegeben sind. Deren Summe muss aber gerade $2a$ ergeben, also

$$\frac{p}{1-\varepsilon} + \frac{p}{1+\varepsilon} = 2a \tag{35}$$

Daraus ergibt sich nach Addition der Brüche,

$$\boxed{a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}} \tag{36}$$

Die Berechnung der kleinen Halbachse b ist schwieriger. Wir betrachten dazu das rechtwinklige Dreieck, welches die Strecke s in (34) als Hypotenuse besitzt. Der Mittelpunkt des Zentralgestirns ist eine Ecke dieses Dreiecks. Nun muss der Punkt, an dem die kleine Halbachse auf die Ellipse trifft, die Bahnkurvengleichung (29) erfüllen. Für diesen Punkt gilt $x = a - \frac{p}{1-\varepsilon} = -p\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$. Daher erhält man nach (29),

$$s - \varepsilon p \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = p \tag{37}$$

Das Auflösen dieser Gleichung liefert $s = p/(1-\varepsilon^2)$, d.h.

$$\boxed{s = a} \tag{38}$$

	$\mathcal{E}, \ell$	p, ε	a, b
$\mathcal{E} =$	$\mathcal{E}$	$-\frac{GM(1-\varepsilon^2)}{2p}$	$-\frac{GM}{2a}$
$\ell =$	ℓ	$\sqrt{GMp}$	$\sqrt{\frac{GMb^2}{a}}$
$p =$	$\frac{\ell^2}{GM}$	p	$\frac{b^2}{a}$
$\varepsilon =$	$\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}\ell^2}{G^2M^2}}$	ε	$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$
$a =$	$-\frac{GM}{2\mathcal{E}}$	$\frac{p}{1-\varepsilon^2}$	a
$b =$	$\frac{\ell}{\sqrt{-2\mathcal{E}}}$	$\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	b

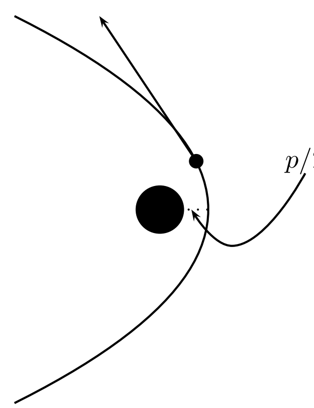
Abbildung 5: Umrechnungsformeln zwischen verschiedenen Paaren von charakteristischen Größen, welche die Bahnkurve definieren: spezifische Energie $\mathcal{E}$ und spezifischer Drehimpuls ℓ; Parameter p und Exzentrizität ε; große Halbachse a und kleine Halbachse b. Die Tabelle bezieht sich auf den elliptischen Fall, d.h. sie gilt für $\varepsilon < 1$, was äquivalent zu $\mathcal{E} < 0$ ist. Für den hyperbolischen Fall gibt es sehr ähnliche Formeln.

Andererseits ist nach Pythagoras $b^2 + \left(p\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 = s^2$, also

$$b = \sqrt{p^2\left(\frac{1}{1-\varepsilon^2}\right)^2 - p^2\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2} = \boxed{\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} \tag{39}$$

Durch Umformen und Auflösen der nun bekannten Gleichungen (25), (27), (36) und (39) erhält man die Formeln in Abbildung 6.

- $\underline{\varepsilon = 1}$: Nun ist die Bahnkurve eine Parabel:



(40)

Die Bahnkurve hat jetzt die Form

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\cos\varphi}. \tag{41}$$

Insbesondere tritt der kleinste Abstand zum Zentralgestirn wieder ein bei $\varphi = 0$ und ist gegeben durch $p/2$.

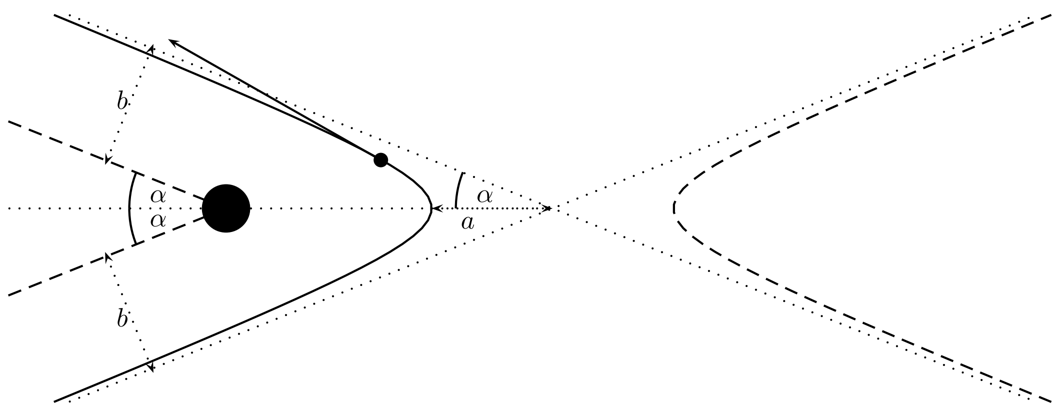
Aus (27) folgt, dass der Planet sich genau dann auf einer Parabelbahn befindet, falls $\mathcal{E} = 0$. Zusammen mit der Energieerhaltung (8) folgt daraus, dass der Planet die Anfangsgeschwindigkeit

$$\boxed{v = \sqrt{2\frac{GM}{r}}} \tag{42}$$

haben muss, um auf eine Parabelbahn zu gelangen – egal in welche Richtung der Geschwindigkeitsvektor zeigt, relevant ist nur sein Betrag. Sobald der Planet also eine Geschwindigkeit besitzt, die größer oder gleich dieser sogenannten **2. kosmische Geschwindigkeit** ist, kann er in Richtung $r = \infty$ abhauen und dadurch die Region um das Zentralgestirn verlassen.

Aus (8) folgt, dass die Geschwindigkeiten des Planeten auf der Parabelbahn proportional zu $1/\sqrt{r}$ ist, also für $r \to \infty$ immer kleiner wird. Insbesondere wird der Planet also relativ lange brauchen, um eine große Entfernung zum Zentralgestirn zu erreichen.

- $\underline{\varepsilon > 1}$: In diesem verbleibenden Fall ist die Bahnkurve eine Hyperbel:



(43)

Wieder ist die Geometrie der Bahnkurve durch ε und p bestimmt. Weitere geometrische Größen sind die eingezeichneten Strecken a und b sowie der Winkel α. Die Strecke b gibt an, wie weit man den Planeten verschieben müsste, um ihn genau radial in Richtung Zentralgestirn zu schicken, solange sich der Planet noch in großem Abstand zum Zentralgestirn befindet. Der Winkel α gibt an, wie stark der Planet von seiner ursprünglichen Flugrichtung abgelenkt wird; dieser **Ablenkwinkel** beträgt $\pi - 2\alpha$.

Die Gleichung der Bahnkurve (20) liefert einen positiven Wert für $r(\varphi)$ solange

$$1 + \varepsilon\cos\varphi > 0 \tag{44}$$

gilt. Sobald $\cos\varphi$ so klein wird, dass diese Ungleichung verletzt ist, wird die Bahnkurve diesen Winkel φ also nicht erreichen. In der Abbildung ist dies der Fall genau zwischen den beiden gestrichelten Linien. Der Winkel α ist also dadurch gegeben, dass $1+\varepsilon\cos(\pi-\alpha)$ gilt. Daraus folgt,

$$\boxed{\cos\alpha = \varepsilon^{-1}} \tag{45}$$

Aus anderen geometrischen Überlegungen erhält man die Beziehungen

$$\boxed{a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}}, \qquad \boxed{b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \tag{46}$$

Diese sind das hyperbolische Analogon zu (36) und (39).

7 Anwendung: Swing-by

Raumsonden, die das Sonnensystem oder dessen Rand erforschen sollen, müssen gewaltige Distanzen zurücklegen. Zudem müssen sie, falls sie in Richtung äußeres Sonnensystem fliegen, auch noch das Gravitationsfeld der Sonne überwinden! Von der Erdbahn aus braucht man, um das Sonnensystem verlassen zu können, eine Mindestgeschwindigkeit die durch (42) berechnet werden kann:

$$v_{\min} \approx \sqrt{2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1,50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}} \approx 42,1\,\frac{\mathrm{km}}{s} \tag{47}$$

Wie kann man eine Raumsonde auf eine solche wahnsinnige Geschwindigkeit beschleunigen? Das Problem mit einem raumsondeneigenen Antrieb ist, dass ein solcher sehr viel Treibstoff benötigt. Nun ist der Treibstoff selbst wieder so schwer, dass für seinen Transport und seine Beschleunigung wieder viel zusätzliche Energie aufgewendet werden muss, was zu einem noch größeren Treibstoffbedarf führt.

Glücklicherweise gibt es eine geniale Methode, die Schwerkraft von den Planeten zu nutzen, an denen die Raumsonde vorbeifliegt. Wichtig ist dabei, dass sich der Planet selbst relativ zur Sonne ebenfalls bewegt. Sei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Raumsonde, während sie sich einem Planeten nähert, und $\vec{w}$ die Geschwindigkeit des Planeten, beide vom Bezugssytem der Sonne aus gesehen. Dann hat die Raumsonde im Bezugssystem des Planeten die Geschwindigkeit $\vec{v} - \vec{w}$. Vom Planeten als Zentralgestirn aus gesehen, bewegt sich die Raumsonde dann auf einer Hyperbelbahn (43) um den Planeten. Dadurch wird die Sonde um den Winkel $\pi - 2\alpha$ abgelenkt; im Bezugssystem des Planeten hat die Sonde nach dem Manöver eine Geschwindigkeit, die zwar den gleichen Betrag hat wie $\vec{v}-\vec{w}$, aber eine um $\pi-2\alpha$ gedrehte Richtung; sei also $(\vec{v}-\vec{w})_{\pi-2\alpha}$ dieser gedrehte Geschwindigkeitsvektor. Dann ist nach Rücktransformation die Geschwindigkeit relativ zur Sonne gegeben durch

$$(\vec{v} - \vec{w})_{\pi-2\alpha} + \vec{w} \tag{48}$$

Dies ist nun ein Geschwindigkeitsvektor, der einen deutlich größeren Betrag haben kann als das ursprüngliche $\vec{v}$! Man hat dann also das Gravitationsfeld des Planeten genutzt, um die Raumsonde zu beschleunigen. Aufgrund der Energieerhaltung muss dabei natürlich umgekehrt der Planet abgebremst werden und Energie verlieren; da die Masse das Planeten im Vergleich zur Masse der Raumsonde unglaublich viel größer ist, ist das aber vernachlässigbar.

Das beschriebene Verfahren trägt die Bezeichnung **Swing-by**. Es kann nicht nur angewendet werden, um Raumsonden zu beschleunigen, sondern auch um sie abzubremsen – dies kann sinnvoll sein, wenn man zum Beispiel eine Raumsonde auf eine Umlaufbahn um einen anderen Planeten bringen will: erst nach Abbremsen der Sonde **Mariner 10** durch Swing-by an der Venus war sie überhaupt erst langsam genug, um auf eine Umlaufbahn um Merkur einschwenken zu können.

8 Der zeitliche Verlauf der Bahnkurve

Bisher haben wir uns intensiv mit der Form der Bahnkurve beschäftigt. Wie sieht aber der zeitliche Verlauf dieser Bahnkurve aus? Wenn wir gefragt werden, an welchem Punkt im Raum sich der Planet zu einem bestimmten Zeitpunkt t befindet, dann können wir bisher nur sagen, dass er sich irgendwo auf der Bahnkurve befindet. Auf welchem Punkt der Bahnkurve das aber ist, darüber wissen wir momentan noch nichts.

Aus der Drehimpulserhaltung (7)

$$rv_\varphi = \ell = \text{const.} \tag{49}$$

erhält man mit $v_\varphi = \frac{r\,d\varphi}{dt}$,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell = \text{const.} \tag{50}$$

also

$$dt = \frac{r(\varphi)^2}{\ell}\, d\varphi. \tag{51}$$

Wenn man also wissen will, wieviel Zeit Δt vergangen ist, während der Planet sich vom Winkel φ_1 bis zum Winkel φ_2 bewegt hat, kann man diese Gleichung integrieren zu

$$\Delta t = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r(\varphi)^2}{\ell}\, d\varphi \tag{52}$$

Durch Einsetzen von (20) und Berechnen des Integrals kann man dadurch tatsächlich eine explizite Darstellung für Δt in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 bekommen. Um die Bahnkurve im tatsächlichen Verlauf zu kennen, hätte man allerdings lieber eine Darstellung von φ_2 in Abhängigkeit von φ_1 und Δt; denn dann könnte man, bei bekannter Anfangsbedingung φ_1, sofort ausrechnen, wo sich der Planet zu einem um Δt späteren Zeitpunkt befindet. Die Darstellung von Δt in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2, die man durch Berechnen des Integrals (52) bekommt, lässt sich allerdings nicht nach φ_2 auflösen. Daher werden wir uns hier nicht weiter mit dieser Rechnung befassen.

Eine elegante Umformulierung der Drehimpulserhaltung (50) ist das 2. Keplersche Gesetz:

> **2. Keplersches Gesetz:** Der $\vec{r}$-Vektor des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Dieses Gesetz ist in Abbildung 6 illustriert. Die zwischen den Zeitpunkten t und $t + dt$ durchlaufene Fläche kann sehr gut angenähert werden durch die Fläche des vom Zentralgestirn und den beiden Planetenpositionen aufgespannten Dreiecks; je kleiner das Zeitintervall dt, desto kleiner ist der relative Fehler dieser Näherung, und da wir uns dt als infinitesimale Größe vorstellen, kann in diesem Fall der Fehler sogar vernachlässigt werden. Die Fläche des Dreiecks ist aber gerade gegeben durch

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \approx \frac{1}{2} \cdot r(t) \cdot r(t)\, d\varphi \tag{53}$$

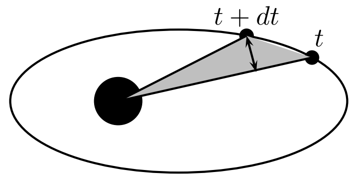


Abbildung 6: Illustration des 2. Keplerschen Gesetzes.

Deshalb ist die durchlaufene Fläche pro Zeiteinheit gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\ell \tag{54}$$

Dies liefert nicht nur eine anschaulich-geometrische Interpretation des Drehimpulses, sondern außerdem auch eine Formel für die Dauer eines gesamten Umlaufs! Diese heißt auch Periode und wird meistens mit dem Buchstaben T bezeichnet. Genauso wie man bei einer gleichförmigen Bewegung die Zeit als $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Geschwindigkeit}}$ erhält, kann man hier rechnen

$$T = \frac{A_{\text{ges}}}{dA/dt} = 2\frac{\pi ab}{\ell} \tag{55}$$

wobei benutzt wurde, dass die Fläche einer Ellipse gegeben ist durch πab; denn die Fläche des Einheitskreises ist π, und man bekommt die Ellipse mit Halbachsen a und b, indem man den Kreis erst um den Faktor a in Richtung der großen Halbachse streckt und dann um den Faktor b in Richtung der kleinen Halbachse. Zusammen mit $\ell = \sqrt{\frac{GMb^2}{a}}$ hat man dann also

$$T = 2\pi ab\sqrt{\frac{a}{GMb^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{56}$$

In der Form

$$\boxed{a^3 \cdot 4\pi^2 = T^2 \cdot GM} \tag{57}$$

ist diese Gleichung auch bekannt als **3. Keplersches Gesetz**.

Wenn man einmal die Vorfaktoren GM und $4\pi^2$ oder die Potenzen vergessen hat, aber noch weiß, dass in der Formel nur die große Halbachse und nicht die kleine vorkommt, kann man sich das 3. Keplersche Gesetz auch aus dem Spezialfall der Kreisbahn erschließen. Denn dort muss gelten, aufgrund des Kräftegleichgewichts zwischen Zentripetalkraft und Gravitationskraft,

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}, \tag{58}$$

also

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{59}$$

was äquivalent zu (57) mit $a = r$ ist.

9 Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Zeige, dass Gleichung (12) zu Gleichung (13) äquivalent ist.

Aufgabe 2. Die Erde umkreist die Sonne in einem Abstand von etwa 150 Millionen km mit einer Exzentrizität $\varepsilon \approx 0.017$. Wie groß ist die jährliche Schwankung im Abstand Erde – Sonne?

Aufgabe 3. Im November 2008 hatte eine Astronautin der Internationalen Raumstation ISS ihren Werkzeugkasten "weggeworfen", der sodann in die Tiefen des Alls entglitt[1]. Man nehme an, dass die Astronautin dem Werkzeugkasten einen kleinen Impuls in Richtung Erdmittelpunkt gegeben hat. Beschreibe, wie sich der Werkzeugkasten von der Raumstation aus gesehen bewegt! Wie weit wird er sich der Raumstation wieder annähern?

Aufgabe 4. Eine Raumsonde fliegt mit der Geschwindigkeit v in radialer Richtung aus vom Zentrum des Sonnensystems, wo sich die Erde befindet, nach außen. Sie kommt in die Nähe von Uranus, der sich mit der Geschwindigkeit w auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt. Welchen Ablenkwinkel sollte man für das Swing-by-Manöver wählen, so dass die Raumsonde möglichst schnell wird? Welche Geschwindigkeit wird sie dann nach dem Manöver haben?

Aufgabe 5. Nach dem 1. Keplerschen Gesetz ist Bahnkurve eines Planeten ein Kegelschnitt. Außerdem ist ein Kegelschnitt gerade die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene. Definiert die Bahnkurve also einen Kegel im Raum, dessen Schnitt mit der Bahnebene gerade die Bahnkurve liefert? Welche physikalische Bedeutung hat dann die Spitze des Kegels?

Da ich keine Antwort auf diese Frage kenne: wenn du etwas herausgefunden hast, dann stelle deine Überlegungen bitte ins Orpheus-Forum oder schreib sie mir per E-Mail!

Literatur

[Arn] Vladimir Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag.

[Hym] Andrew Hyman, *A simple Cartesian treatment of planetary motion*, Eur. J. Phys. 14 (1993), pp. 145-147.

[1] siehe `http://www.scienceblogs.de/geograffitico/2008/11/lost-in-space-ein-werkzeugkasten.php`