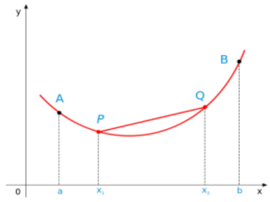
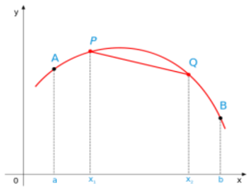
1. Kurvendiskussion

Definitionsbereich D_f	Menge aller Werte von x, für die f(x) existiert
Wertebereich W_f	Menge aller Werte, die f(x) annehmen kann
Nullpunkte	Punkte, für die gilt f(x)=0 → P(x_0,0) mit $x_0=f^{-1}(0)$
Montonie	f(x) ist im Intervall [a,b] (streng) monoton steigend, wenn für alle n, m ∈ [a,b] mit n>m gilt f(n) ≥f(m) (bzw. f(n) >f(m) für streng monoton steigend). Alternativ: f'(x)>0 im Intervall [a,b] f(x) ist im Intervall [a,b] (streng) monoton fallend, wenn für alle n, m ∈ [a,b] mit n>m gilt f(n) ≤f(m) (bzw. f(n) <f(m) für streng monoton steigend). Alternativ: f'(x)<0 im Intervall [a,b]
Extrema	Notwendiges Kriterium: f'(x)=0 Hinreichendes Kriterium: f''(x) ≠0 f''(x)>0 → Minimum f''(x)<0 → Maximum
Konvexität	Konvexe Funktion Konkave Funktion   f''(x)>0 f''(x)<0
Grenzwerte	Der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ ist der Wert, den f(x) annimmt, wenn sich x dem Wert a nähert.

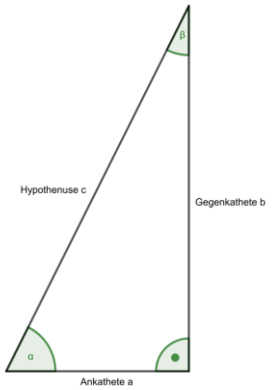
2. Spezielle Funktionen

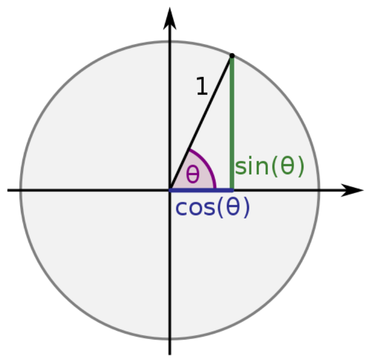
- Exponentialfunktion e^x
    - Definition als Potenzfunktion a^n
    - Eulersche Zahl e $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2{,}7182$
    - Wichtigste Eigenschaft: $(e^x)' = e^x$
- Logarithmusfunktion $\log_a x$
    - Wenn gilt $y = a^x$, so sei $x = \log_a y$
    - Meist $\ln x = \log_e x$ oder $\lg x = \log_{10} x$
    - Logarithmengesetze: $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

$$\log x^a = a \cdot \log x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

- Winkelfunktionen
    - Definition im Dreieck und im Einheitskreis (Radius=1)

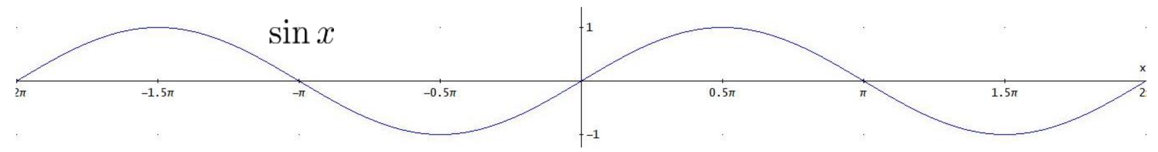


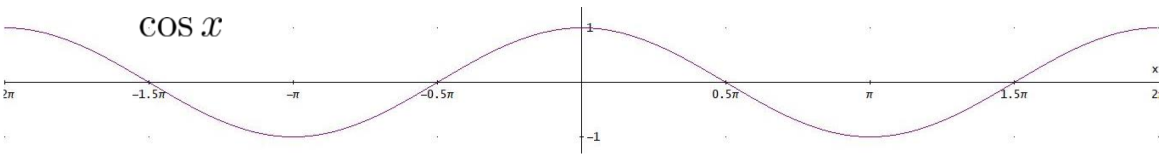


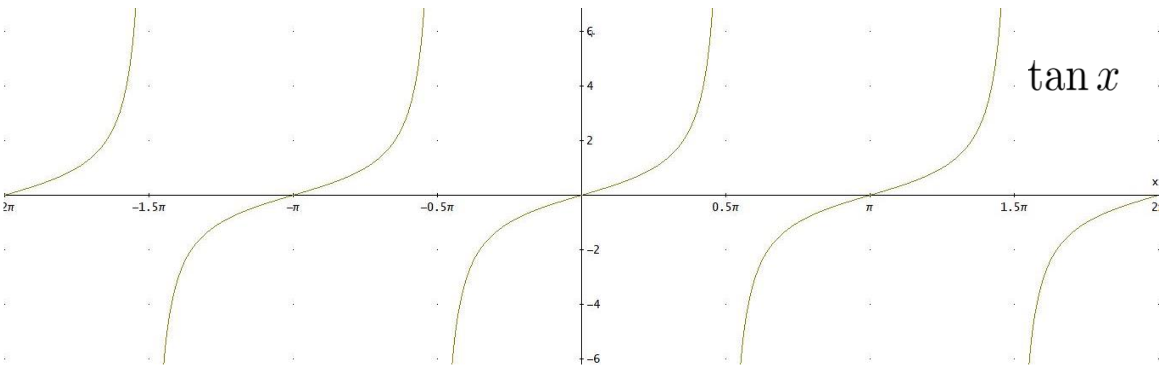
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

○ Graphen





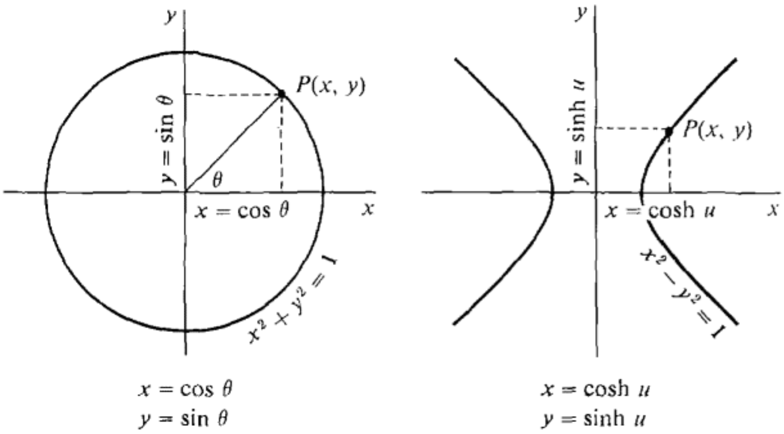


- Periodizität: $f(x+2\pi) = f(x)$ für Sinus und Cosinus

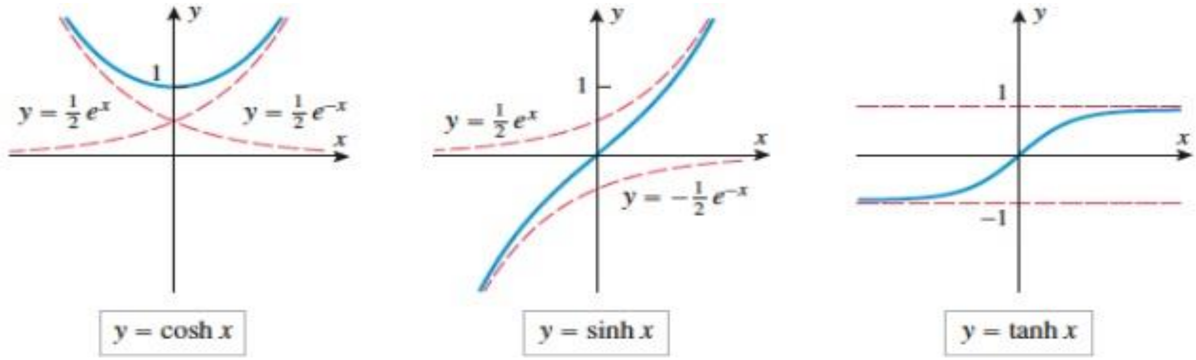
  $f(x+\pi) = f(x)$ für Tangens

- Umkehrfunktionen, z.B. Sei $y = \sin x$, so gilt $x = \arcsin y$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

– Hyperbelfunktionen
  - Definition: an der Hyperbel ($x^2 - y^2 = 1$), statt am Kreis ($x^2 + y^2 = 1$)



  - Graphen und Asymptoten



  - Als Exponentialfunktionen: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
  - Umkehrfunktionen, z.B. Sei $y = \sinh x$, so gilt $x = \operatorname{arsinh} y$.

<u>3. Partialbruchzerlegung</u>

– Polynomdivision
  - Anwendbar auf Funktionen der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $grad(P(x)) \geq grad(Q(x))$
  - Vorgehen
    - Term höchsten Grades von P(x) durch Term höchsten Grades von Q(x) teilen
    - Quotient a der beiden Terme zum Ergebnis addieren
    - Das Polynom $a \cdot Q(x)$ von P(x) abziehen, um neues P*(x) zu erzeugen
    - Vorgehen wiederholen, bis der Grad von P(x) kleiner als der Grad von Q(x) ist
    - Den Term $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ als Restterm zum Ergebnis addieren

- Partialbruchzerlegung
  - Wenn gilt $grad(P(x)) \geq grad(Q(x))$ Polynomdivision durchführen
  - Nullstellen von Q(x) bestimmen
  - Nullstellenform $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ aufstellen
  - Bruch in Summanten zerlegen
    - $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\ldots}{(x-x_1)} + \frac{\ldots}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{\ldots}{(x-x_n)}$
    - Fallen mehrere Nullstellen zusammen, werden diese zu einem Summanten zusammengefasst, z.B. $x_2=x_3$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\ldots}{(x-x_1)} + \frac{\ldots}{(x-x_{2/3})^2} + \ldots + \frac{\ldots}{(x-x_n)}$ oder $x_2=x_3=x_4$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\ldots}{(x-x_1)} + \frac{\ldots}{(x-x_{2/3/4})^3} + \ldots + \frac{\ldots}{(x-x_n)}$
    - Sind zwei Nullstellen komplex, wird als Nenner ihre quadratische Formel verwendet, z.B. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\ldots}{(x-x_1)} + \frac{\ldots}{x_{2/3}{}^2+x_{2/3}+1} + \ldots$
    - Zähler jedes Summanden wird Polynom, dessen Grad um 1 geringer als der Grad des Nenners ist, z.B. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{Bx+C}{(x-x_{2/3})^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{(x-x_{4/5/6})^3} + \ldots$
  - Nenner ausmultiplizieren, z.B. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A(x-x_1)+B(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)}$
  - Koeffizientenvergleich durchführen, z.B. mit $P(x) = A(x - x_1) + B(x - x_2)$
  - Bestimmte Koeffizienten A, B, … einsetzen
- Beispiel $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$
  - Grade der Polynome bestimmen

$$grad(P(x)) = grad(2x^2 + x + 1) = 2$$
$$grad(Q(x)) = grad(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 3$$
$$grad(P(x)) < grad(Q(x)) \implies \text{keine Polynomdivision}$$

  - Nullstellen von Q(x) bestimmen

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\text{1. Raten: } x_1 = -1 \implies x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 : (x + 1)$$
$$\implies x^2 + x + 1 = 0$$

  Nullpunkte x_2 und x_3 sind komplex
  - Nullstellenform $Q(x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$
  - Bruch in Summanten zerlegen

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

  - Nenner ausmultiplizieren

$$2x^2 + x + 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

  - Koeffizientenvergleich

Koeffizientenvergleich

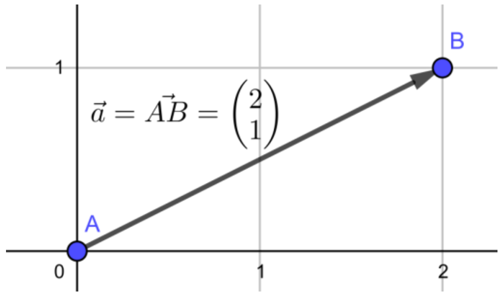
$$x^2 : A + B = 2$$
$$x : A + B + C = 1$$
$$1 : A + C = 1$$

  - Gleichungssystem lösen: $A = 2, B = 0, C = -1$
  - Koeffizienten einsetzen

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

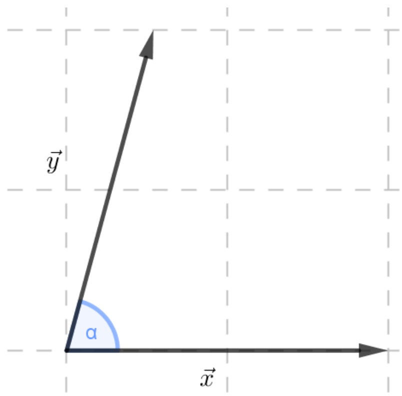
4. Vektorrechnung

- Definition: geometrisches Objekt mit Länge und Richtung; beschreibt Parallelverschiebung
- Darstellung als Zahlentupel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$



- Skalarmultiplikation: $\lambda\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}$
- Vektoraddition: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

  geometrisch: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Skalarprodukt:
  - Euklidisches Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
  - Geometrisch: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\alpha$



- Länge eines Vektors: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$
- Für orthogonale Vektoren gilt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
- Kreuzprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{y}$: $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$
  - $\vec{z}$ ist ein zu $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonaler Vektor
  - $|\vec{z}|$ ist der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms
  - Betrag von $\vec{z}$: $|\vec{z}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\alpha$
  - Bestimmen von $\vec{z}$ als Determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$