

# Komplexe Wechselstromrechnung

Vincent Stimper  
vincent.stimper@gmail.com

10. Oktober 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Beschreibung von Wechselstromkreisen mittels komplexer Zahlen</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

## 1 Einleitung

Eine zentrale Aufgabe der Mathematik ist es, Lösungen für Gleichungen zu finden. Anhand

$$1 = x + 2 \tag{1}$$

sehen wir, dass die Lösbarkeit von Gleichungen von der zugrunde liegenden Zahlenmenge abhängt. In den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  hat (1) keine Lösung. Führen wir die negativen Zahlen  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  ein, so wird die Gleichung durch  $-1$  gelöst. Diese bilden zusammen mit den natürlichen Zahlen und der Null die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Analog führt

$$1 = 2x$$

zu den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ , der Menge aller gemeinen Brüche, und

$$x^2 = 2$$

zu den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Jedoch bereitet

$$x^2 = -1 \tag{2}$$

selbst in den reellen Zahlen Probleme. Um (2) lösbar zu machen, ist die Einführung einer weiteren Menge von Zahlen nötig: Den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ .

## 2 Komplexe Zahlen

Wir können (2) lösen, indem wir schlicht eine Lösung  $i$  definieren. Es gilt also  $i^2 = -1$ . Damit haben wir unser Problem zwar auf eine sehr simple Weise gelöst, allerdings ist noch nicht klar, ob auch

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad (3)$$

eine Lösung besitzt. In der Hoffnung, mit (3) und allen weiteren Polynomen klarzukommen, definieren wir die Menge der komplexen Zahlen.

**Definition 1.** Die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} := \{r + is \mid r, s \in \mathbb{R}\}.$$

Sei  $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$ . Wir nennen  $a$  den Real- und  $b$  den Imaginärteil von  $a + ib$  und schreiben  $\operatorname{Re}(a + ib) := a$  sowie  $\operatorname{Im}(a + ib) := b$ . Addition und Multiplikation sind wie folgt auszuführen:

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \quad (4)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (5)$$

Interpretieren wir  $a + i0$  als  $a$ , so sind die reellen Zahlen in den komplexen enthalten. Jemanden mit wenig Erfahrung in formaler Mathematik mag es verwundern, dass wir definiert haben, wie wir komplexe Zahlen addieren und multiplizieren. Die Regeln (4) und (5) erscheinen unter Verwendung von  $i^2 = -1$  intuitiv nachvollziehbar. Schließlich erhielten wir (4) durch schlichte Klammersetzung und (5) durch bloßes ausmultiplizieren. Allerdings ist „ $a + ib$ “ a priori ein neues Objekt. Ohne weitere Informationen könnte es sich um ein Schriftzeichen handeln, welches für ein bestimmtes Wort steht. Erst dank (4) und (5) werden die Elemente von  $\mathbb{C}$  zu Objekten, auf denen wir Rechenoperationen ausführen können, also zu Zahlen. Selbstverständlich sind die Regeln für die Ausführung der Addition und der Multiplikation zweier komplexer Zahlen genau so gewählt, dass wir mit ihnen wie üblich rechnen können und lediglich  $i^2 = -1$  beachten müssen. Das werden wir im Folgenden tun.

An dieser Stelle ist noch nicht klar, ob zu einer komplexen Zahl  $a + ib$  die multiplikative Inverse

$$\frac{1}{a + ib}$$

existiert<sup>1</sup>. Zunächst notieren wir folgende Beobachtung:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - aib + iba - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Folgende Umformung bietet sich an:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Wir haben die multiplikative Inverse einer komplexen Zahl bestimmt. Da  $a - ib$  dabei eine zentrale Rolle zukam, geben wir ihr einen eigenen Namen.

**Definition 2.** Sei  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Die zu  $z$  komplex konjugierte Zahl ist

$$\bar{z} := z^* := a - ib.$$

Ferner ist der Betrag von  $z$  ist gegeben durch

$$|z| := \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

<sup>1</sup>Mit *existieren* ist hier gemeint, dass es sie gibt und sie Element der komplexen Zahlen ist.

Als nächstes widmen wir uns verschiedenen Darstellungsformen komplexer Zahlen. Dazu benötigen wir den folgenden

**Satz 3.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

*Beweis.* Siehe Kapitel 2.4 in [1]. Es kann sogar  $x \in \mathbb{C}$  gewählt werden, siehe [2]. □

Richard Feynman bezeichnete diese Formel ehrfurchtsvoll als „unseren Juwel“ [3]. Für  $x = \pi$  erhalten wir die bemerkenswerte Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Sie vereint die fünf zentralen Zahlen der Mathematik 0, 1,  $e$ ,  $\pi$  und  $i$ .

Mithilfe der eulerschen Formel können wir die Zahl  $a + ib$  in die Form  $re^{i\varphi}$  bringen.

$$\begin{aligned} re^{i\varphi} &= r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} a + ib \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{r^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} = r \\ \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \cos(\varphi), \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

Die Gleichungen (6) lassen sich für  $a > 0$  durch

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (7)$$

lösen. Allgemein setzen wir

$$\varphi = \arg(a, b),$$

wobei  $\arg$  die Argumentfunktion ist. Sie wird in [2] näher diskutiert. Wir werden uns jedoch bei der Berechnung von  $\varphi$  auf (7) beschränken, da in unseren Beispielen  $a \geq 0$  gegeben sein wird<sup>2</sup>. Stellen wir die komplexe Zahl  $a + ib$  als den Vektor  $(a, b)^\top$  dar (siehe Abbildung 1), so wird eine geometrische Interpretation von  $r$  und  $\varphi$  möglich.  $(r, \varphi)^\top$  entspricht dem Vektor

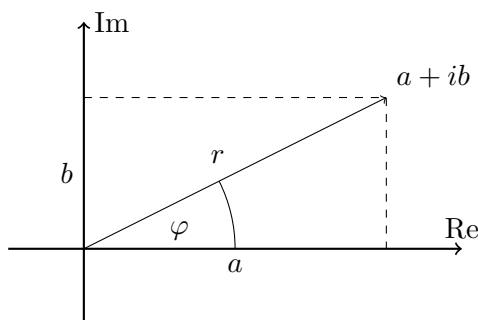


Abbildung 1: Darstellung der komplexen Zahl  $a + ib = re^{i\varphi}$  als Vektor  $(a, b)^\top$ .

$(a, b)^\top$  in Polarkoordinaten. Deshalb nennen wir  $re^{i\varphi}$  die Polardarstellung der komplexen Zahl  $a + ib$ .

Zum Abschluss dieses Kapitels weisen wir noch auf den *Fundamentalsatz der Algebra* hin.

<sup>2</sup>Für  $a = 0$  gilt  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , wobei das Vorzeichen gleich dem von  $b$  ist (siehe Abbildung 1).

**Satz 4.** Jedes nicht konstante komplexe Polynom besitzt in  $\mathbb{C}$  wenigstens eine Nullstelle.

*Beweis.* Ein elementarer Beweis wird in [4] geführt. Eleganter geht es mit dem Satz von Liouville aus der Funktionentheorie [2].  $\square$

Dieser Satz gewährleistet nicht nur die Lösbarkeit der in den ersten beiden Kapiteln genannten, sondern aller nicht konstanter Polynome in den komplexen Zahlen.

Eine formale Einführung der komplexen Zahlen über zweidimensionale Vektoren wird in [1, 5] dargeboten. Auf die algebraische Bedeutung von  $\mathbb{C}$  wird in [6] näher eingegangen.

### 3 Beschreibung von Wechselstromkreisen mittels komplexer Zahlen

Nicht nur zum Lösen mathematischer Gleichungen sind komplexe Zahlen geeignet. In der Physik gibt es viele Teilbereiche, in denen sie eine geeignete Darstellung der Naturgesetze erlauben. Beispielsweise ist die einen quantenmechanischen Zustand beschreibende Wellenfunktion komplexwertig (siehe z.B. [7]). Wir beschäftigen uns mit der Beschreibung physikalischer Größen in Wechselstromkreisen mit Hilfe von komplexen Zahlen. Ein Kondensator befindet sich wie in

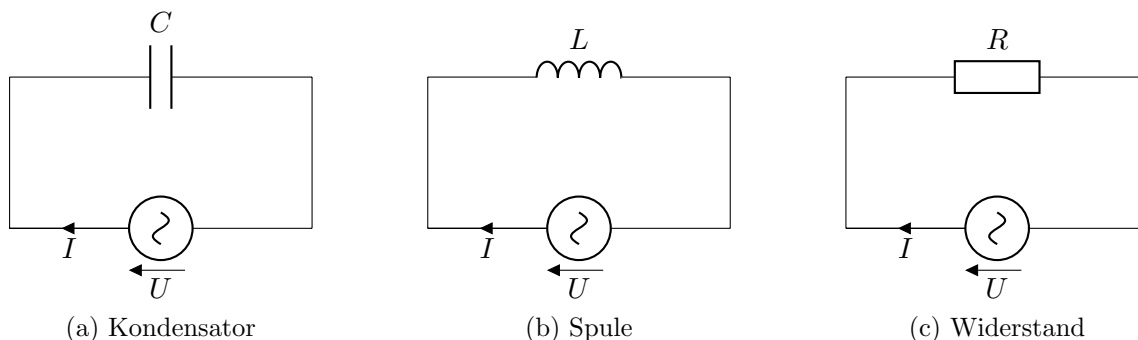


Abbildung 2: Verschiedene Bauelemente im Wechselstromkreis.

Abbildung 2a im Wechselstromkreis. Die Spannung sei durch  $U = U_0 \cos(\omega t)$  gegeben. Wir suchen den Strom  $I$ . Dazu verwenden wir die für den Kondensator gültige Gleichung  $Q = CU$ .

$$\begin{aligned} Q &= CU = U_0 \cos(\omega t) \\ \Rightarrow I &= \frac{dQ}{dt} = -\omega CU_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

Alternativ ist folgender Ansatz möglich: Da  $U = \operatorname{Re}(U_0 e^{i\omega t})$ , können wir statt mit  $U$  mit der komplexen Spannung  $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$  rechnen. Wir fordern, dass für  $\hat{U}$  und die komplexen Größen  $\hat{I}$  und  $\hat{Q}$  die gleichen Gesetze wie für  $U$ ,  $I$  und  $Q$  gelten. Somit erhalten wir

$$\hat{I} = \frac{d\hat{Q}}{dt} = i\omega CU_0 e^{i\omega t}.$$

Der Realteil von  $\hat{I}$  ist gleich der physikalische Lösung (8). Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Zeitabhängigkeit von  $\hat{I}$  und  $\hat{U}$  durch den Faktor  $e^{i\omega t}$  gegeben ist. Folglich ist deren Quotient zeitunabhängig. Wir definieren ihn als den *komplexen Widerstand*

$$Z := \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CU_0 e^{i\omega t}} = \frac{1}{i\omega C}.$$

Analog können wir mit dem in Abbildung 2b dargestellten Stromkreis verfahren. Für die Spule gilt

$$U = L \frac{dI}{dt},$$

$$\Rightarrow \hat{I} = \frac{1}{L} \int \hat{U} dt = \frac{1}{L} \int U_0 e^{i\omega t} dt = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega L}.$$

Daraus erhalten wir ihren komplexen Widerstand

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = i\omega L.$$

Für eine Widerstand im Wechselstromkreis (siehe Abbildung 2c) gilt wie im Gleichstromkreis

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I} = R.$$

Wir können die Kirchhoffschen Gesetze benutzen, um den Gesamtwiderstand einer Verschal-

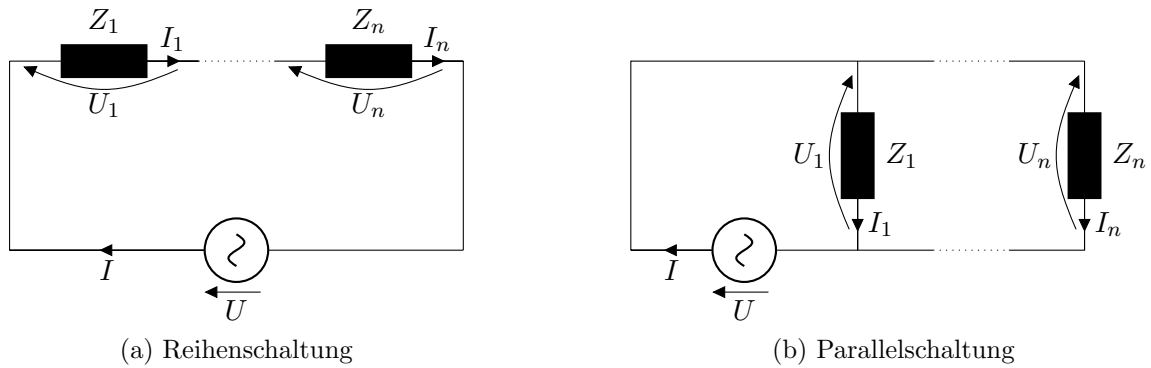


Abbildung 3: Verschaltung mehrerer Bauelemente im Wechselstromkreis.

tung von Bauelementen (siehe Abbildung 3) zu bestimmen. Für eine Reihenschaltung wie in Abbildung 3a gilt

$$\hat{I} = \hat{I}_1 = \dots = \hat{I}_n, \tag{9}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \dots + \hat{U}_n$$

$$= \hat{I}_1 Z_1 + \dots + \hat{I}_n Z_n$$

$$\stackrel{(9)}{=} \hat{I} (Z_1 + \dots + Z_n),$$

$$\Rightarrow Z = Z_1 + \dots + Z_n.$$

Im Parallelstromkreis, der in Abbildung 3b dargestellt ist, erhalten wir

$$\hat{U} = \hat{U}_1 = \dots = \hat{U}_n, \tag{10}$$

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \dots + \hat{I}_n$$

$$= \frac{\hat{U}_1}{Z_1} + \dots + \frac{\hat{U}_n}{Z_n}$$

$$\stackrel{(10)}{=} \hat{U} \left( \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n}.$$

Die komplexen Gesamtwiderstände können analog zu ohmschen Widerständen im Gleichstromkreis berechnet werden.

Zwar haben wir dem komplexen Widerstand interessante Eigenschaften nachgewiesen, aber was teilt er uns physikalisch mit? Wir betrachten ein Bauelement mit komplexen Widerstand  $Z = \operatorname{Re}(Z) + i\operatorname{Im}(Z) = |Z|e^{i\varphi}$ . Dessen Darstellung als Vektor (siehe Abbildung 4) wird *Zeigerdiagramm* genannt. Durch das Bauelement fließe ein Strom  $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$ . Der dazugehörige

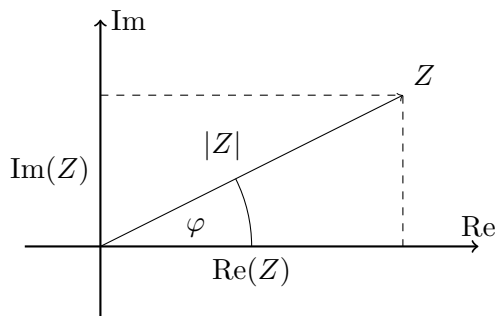


Abbildung 4: Geometrische Darstellung des komplexen Widerstandes  $Z$ , genannt Zeigerdiagramm.

Spannungsabfall beträgt

$$\hat{U} = \hat{I}Z = \underbrace{I_0|Z|}_{U_0} e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Die Spannung ist gegenüber dem Strom um den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)}\right)$$

phasenverschoben<sup>3</sup>.

Messgeräte für Strom und Spannung liefern in der Regel statt dem zeitlichen Verlauf die Effektivwerte der Größen (Amplitude geteilt durch die Quadratwurzel von Zwei). Das Verhältnis der Effektivwerte

$$\frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = |Z|$$

würden wir daher naiv als den gemessenen Widerstand der Schaltung bezeichnen. Daher nennen wir  $|Z|$  *Scheinwiderstand* (oder *Impedanz*). Die dazugehörige Leistung  $P_S = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}} = |Z|I_{\text{eff}}^2$  heißt *Scheinleistung*. Tatsächlich wird innerhalb einer Periode der Dauer  $T$  die mittlere Leistung

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}(\hat{U})\operatorname{Im}(\hat{I})dt \\ &= \frac{I_0^2|Z|}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)dt \\ &= \frac{I_0^2}{2}|Z| \cos(\varphi) \\ &= I_{\text{eff}}^2 \operatorname{Re}(Z) \end{aligned}$$

umgesetzt. Diese wird als *Wirkleistung* bezeichnet. Entsprechend heißt  $\operatorname{Re}(Z)$  *Wirkwiderstand*. Die verbleibenden Komponenten sind der *Blindwiderstand*  $\operatorname{Im}(Z)$  und die *Blindleistung*  $P_B = I_{\text{eff}}^2 \operatorname{Im}(Z)$ . Sie haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung.

<sup>3</sup>Die Gleichung gilt nur für  $\operatorname{Re}(Z) > 0$ . Die Bedingung  $\operatorname{Re}(Z) \geq 0$  ist stets erfüllt, da der Realteil von  $Z$  durch ohmsche Widerstände hervorgerufen, welche nicht negativ sind. Für  $\operatorname{Re}(Z) = 0$  gilt je nach Vorzeichen des Imaginärteils  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

## 4 Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung

Wir wollen den hergeleiteten Formalismus auf einige Beispiele anwenden. Dazu betrachten wir die in Abbildung 5 aufgeführten Schaltungen. An die Schaltungen wird jeweils eine Eingangs-

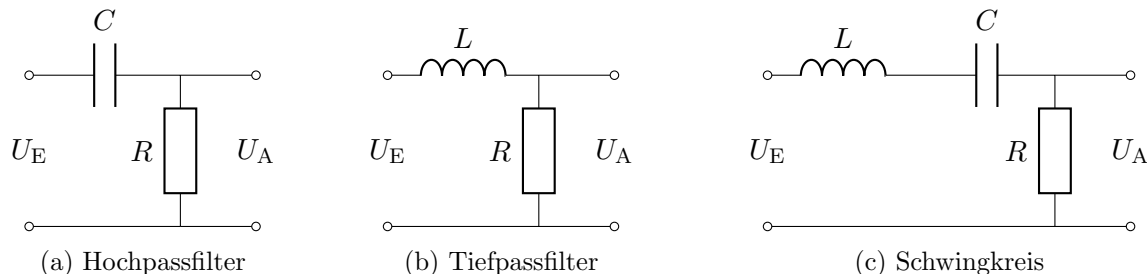


Abbildung 5: Verschiedene Wechselstromschaltung.

spannung  $U_E$  angelegt. Am Widerstand wird die Ausgangsspannung  $U_A$  abgegriffen. Unser Ziel ist es, das Amplitudenverhältnis und die Phase zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung zu ermitteln.

Wir beginnen mit dem Hochpassfilter (siehe Abbildung 5a). Der Gesamtwiderstand der Schaltung ist gegeben durch

$$Z = \frac{1}{i\omega C} + R.$$

Da die Ausgangsspannung am Widerstand abgegriffen wird, gilt

$$\begin{aligned} \hat{U}_A &= R\hat{I} = \frac{R}{Z}\hat{U}_E, \\ \Rightarrow \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} &= \frac{R}{\frac{1}{i\omega C} + R} \\ &= \frac{\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2} (i + \omega CR). \end{aligned}$$

Daraus können wir die gesuchten Werte ermitteln:

$$\begin{aligned} \frac{|\hat{U}_E|}{|\hat{U}_A|} &= \left| \frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A} \right| = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}, \\ \varphi &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} \left( \frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A} \right)}{\operatorname{Re} \left( \frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A} \right)} \right) = \arctan \left( \frac{1}{\omega CR} \right) \end{aligned}$$

Die dazugehörigen Graphen sind in Abbildung 6 dargestellt. Für niedrige Frequenzen verschwindet die Ausgangsspannung, für hohe stimmen die Amplituden von Eingangs- und Ausgangsspannung nahezu überein. Folglich werden Signale mit niedriger Frequenz unterdrückt, während welche mit hoher Frequenz durchgelassen werden. Dadurch wird der Name *Hochpassfilter* plausibel. Die Behandlung des Tiefpassfilters (siehe Abbildung 5b) ist analog zu der des

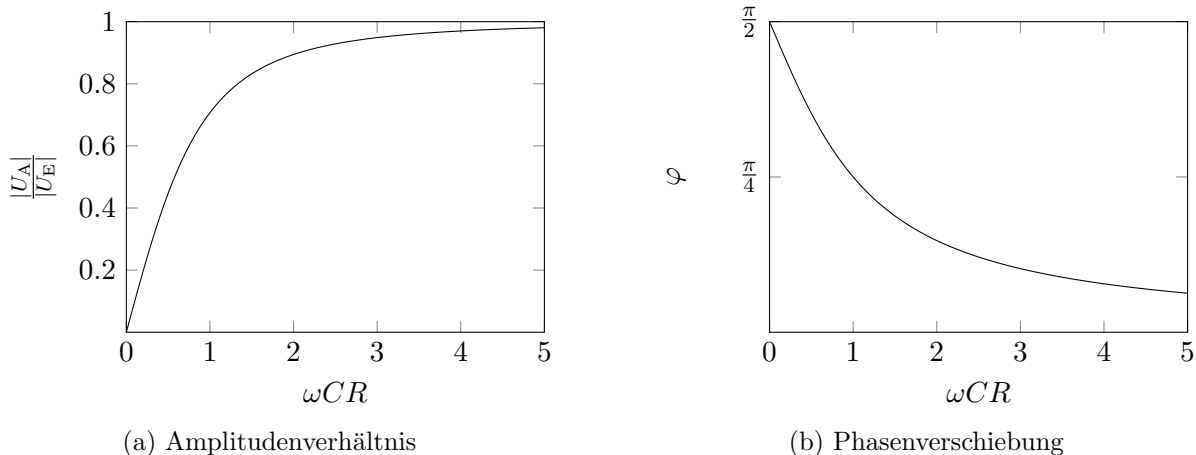


Abbildung 6: Graph des Amplitudenverhältnisses und der Phasenverschiebung der Eingangs- und Ausgangsspannung des Hochpassfilters

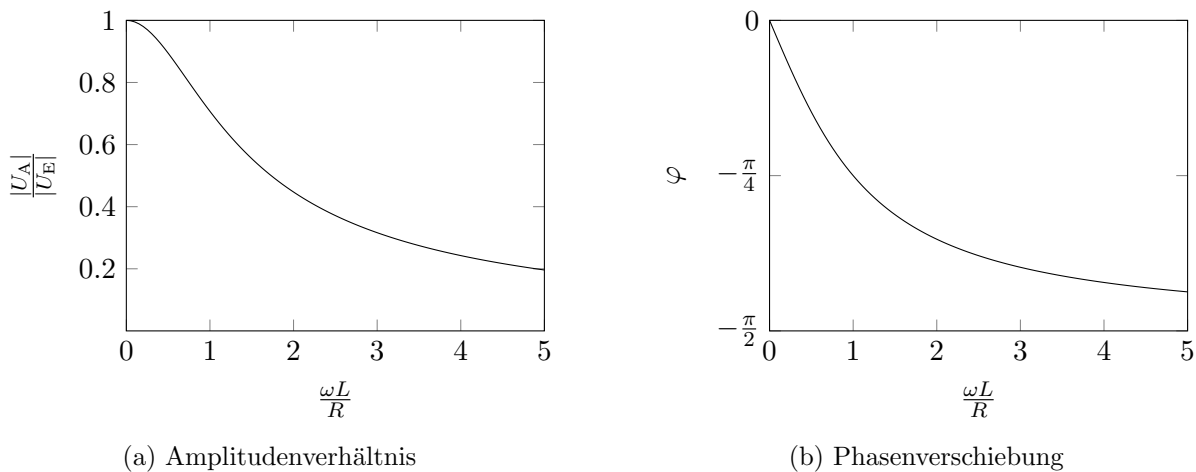


Abbildung 7: Graph des Amplitudenverhältnisses und der Phasenverschiebung der Eingangs- und Ausgangsspannung des Tiefpassfilters

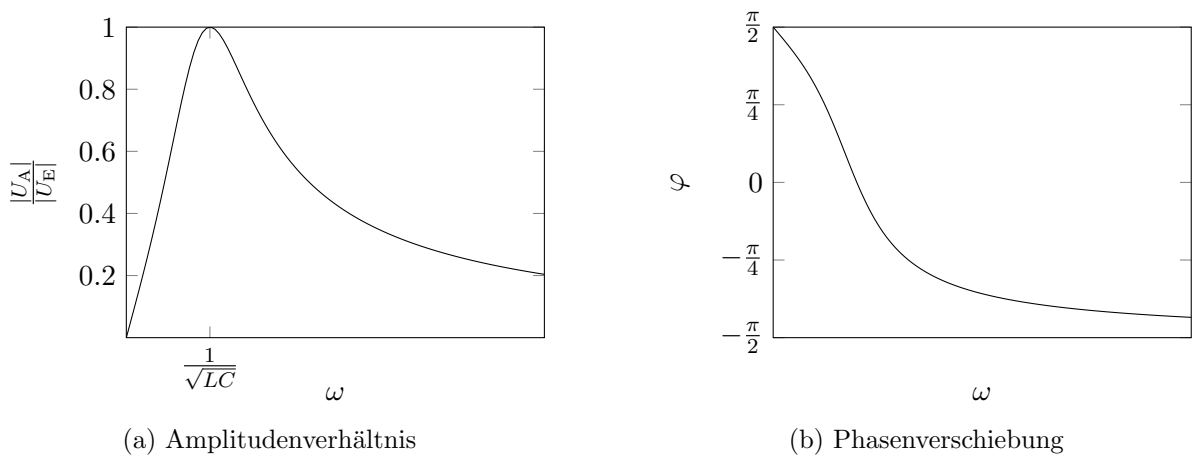


Abbildung 8: Graph des Amplitudenverhältnisses und der Phasenverschiebung der Eingangs- und Ausgangsspannung des Schwingkreises



Hochpassfilters.

$$\begin{aligned}
 Z &= i\omega L + R \\
 \Rightarrow \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} &= \frac{R}{i\omega L + R} \\
 &= \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2} (-i\omega L + R) \\
 \Rightarrow \frac{|\hat{U}_A|}{|\hat{U}_E|} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\
 \Rightarrow \varphi &= -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)
 \end{aligned}$$

In Abbildung 7a wird deutlich, warum der Tiefpassfilter seinen Namen trägt. Für niedrige Frequenzen passiert das Eingangssignal nahezu unverändert. Bei sehr hohen Frequenzen verschwindet die Ausgangsspannung annähernd.

Auch die charakteristischen Größen des Schwingkreises lassen sich analog zu denen des Hochpassfilters bestimmen.

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R \\
 \Rightarrow \frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} &= \frac{R}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R} \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2} \left(1 + i\left(\frac{1}{\omega CR} - \frac{\omega L}{R}\right)\right) \\
 \Rightarrow \frac{|\hat{U}_A|}{|\hat{U}_E|} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \\
 \Rightarrow \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{\omega CR} - \frac{\omega L}{R}\right)
 \end{aligned}$$

Wie erwartet liegt bei

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonanz vor (siehe Abbildung 8a).

Weitere Anwendungen der komplexen Wechselstromrechnung werden in [8] vorgestellt.

## 5 Literatur

- [1] FRITSCHKE, KLAUS: *Grundkurs Analysis 1*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage, 2008.
- [2] FRITSCHKE, KLAUS: *Grundkurs Funktionentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009.
- [3] FEYNMAN, RICHARD: *Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*, Band 1 der Reihe *The Feynman Lectures on Physics*. Basic Books, Philadelphia (USA), 2011.
- [4] FRITSCHKE, KLAUS: *Mathematik für Einsteiger*. Springer Spektrum, 5. Auflage, 2015.
- [5] BROKATE, MARTIN: *Analysis 1*. Vorlesungsskript, [http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/an1\\_ws14.pdf](http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/an1_ws14.pdf), 2015.
- [6] BEUTELSPACHER, ALBRECHT: *Lineare Algebra*. Vieweg+Teubner, 7. Auflage, 2010.
- [7] GRIFFITHS, DAVID: *Quantenmechanik*. Pearson Deutschland, Hallbergmoos, 2. Auflage, 2012.
- [8] DEMTRÖDER, WOLFGANG: *Experimentalphysik 2*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 6. Auflage, 2013.